



José Laudelino de Menezes Neto • (Organizador)

DESBRAVANDO TEMAS EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

UF Editora
UFPB

Sequência de Fibona

DESBRAVANDO TEMAS EM

MATEMÁTICA

PURA E APLICADA



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Terezinha Domiciano Dantas Martins

Reitora

Mônica Nóbrega

Vice-Reitora



Editora UFPB

Geysa Flávia Câmara de Lima Nascimento

Diretora Geral da Editora UFPB

Aline dos Santos Deiró

Vice-Diretora da Editora UFPB

Rildo Coelho

Coordenador de Edição

José Laudelino de Menezes Neto
(Organizador)

**DESBRAVANDO TEMAS EM
MATEMÁTICA
PURA E APLICADA**

Editora UFPB
João Pessoa
2026

1ª Edição – 2026

Esta obra integra a publicação de livros digitais (e-books) do Edital 01/2025 da Editora UFPB, em regime de fluxo contínuo. A chamada pública visa fomentar a divulgação da produção científica, literária, artística e didático-pedagógica da comunidade acadêmica da Universidade Federal da Paraíba, contemplando obras de autoria individual, coautoria ou coletâneas.

Direitos autorais 2026 - Editora da UFPB



Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.

O CONTEÚDO DESTA PUBLICAÇÃO, SEU TEOR, SUA REVISÃO E SUA NORMALIZAÇÃO SÃO DE INTEIRA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES.

OS DIREITOS DE PROPRIEDADE DESTA EDIÇÃO SÃO RESERVADOS À:



Cidade Universitária, Campus I – Prédio da Editora Universitária, s/n
João Pessoa – PB CEP 58.051-970
Site: www.ufpb.br/editora/
Instagram: @editoraufpb
E-mail: atendimento@editora.ufpb.br
Fone: (83) 3216.7147

Editora filiada à



CONSELHO EDITORIAL – Editora UFPB

Portaria Nº 202, de 08 de agosto de 2025 – Reitoria

- Geysa Flávia Câmara de Lima Nascimento** – Presidente | Editora UFPB
Alexandre Coelho Serquiz | Ciências da Saúde
Daniel Araújo de Macedo | Engenharias
Eduardo Rodrigues Viana de Lima | Ciências Exatas e da Natureza
Franklin Kaic Dutra-Pereira | Ciências Biológicas
José Ferrari Neto | Linguística, Letras e Artes
Maurício Rombaldi | Ciências Humanas
Milton César Costa Campos | Ciências Agrárias
Tiago Bernardon de Oliveira | Ciências Humanas
Márcia Félix da Silva | Interdisciplinar
Viviane da Costa Freitag | Ciências Sociais Aplicadas

Catálogo na fonte: **Biblioteca Central da Universidade Federal da Paraíba**

D444	Desbravando temas em matemática pura e aplicada [recurso eletrônico] / José Laudelino de Menezes Neto (organização). - João Pessoa : Editora UFPB, 2026. E-book. Modo de acesso : https://www.editora.ufpb.br/press5/index.php/UFPB/catalog/ ISBN: 978-65-5942-323-1 1. Matemática. 2. Função polinomial de grau três. 3. Sequência de Fibonacci. 4. Curvas de Bézier. I. Menezes Neto, José Laudelino de. II. Título.
UFPB/BC	CDU 51

Como citar a publicação no todo (ABNT 6023:2018):
MENEZES NETO, José Laudelino de. **Desbravando temas em matemática pura e aplicada**.
João Pessoa: Editora UFPB, 2026. ISBN 9786559423231. Acesso: 00/00/0000.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	8
---------------------------	----------

José Laudelino de Menezes Neto

CAPÍTULOS

1

1. CALCULANDO AS RAÍZES DE UM POLINÔMIO DE GRAU TRÊS POR MEIO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	10
--	-----------

Romildo Rodrigues da Silva Regis Junior

José Laudelino de Menezes Neto

1.1 Introdução	10
1.2 Metodologia	11
1.3 Toda função polinomial de grau três tem raiz real	11
1.4 Método de Newton-Raphson	12
1.5 Planilhas e o método de Newton-Raphson com polinômios de grau três	16
1.6 Calculando as outras duas raízes	17
1.7 Fixando o método	18
1.8 Resolvendo problema proposto por Euler	20
1.9 Discussão do método apresentado	21
1.10 Calculando raízes cúbicas	22
1.11 Conclusão	23

2

2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI, RECORRÊNCIA E O NÚMERO DE OURO	25
--	-----------

Ruan Bosco Gomes de Brito

José Laudelino de Menezes Neto

2.1 Introdução	24
2.2 Recorrências lineares	26
2.3 Termo geral da sequência de Fibonacci	28
2.4 Número de ouro	29
2.5 Desenhando a espiral	30
2.6 Conclusão	33

3

3. COMPUTAÇÃO GRÁFICA E CURVAS DE BÉZIER CÚBICAS35

Elenilson Justino de Oliveira

José Laudelino de Menezes Neto

3.1 Introdução	35
3.2 Curvas parametrizadas.....	37
3.3 Curvas de Bézier	38
3.4 Propriedades das curvas de Bézier	41
3.5 Desenhando com curvas de Bézier	46
3.6 Design de fontes tipográficas	51
3.7 Conclusão	52

4

4. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM MÉTODO SIMPLEX POR TABELAS.....55

José Laudelino de Menezes Neto

4.1 Introdução	55
4.2 Método Simplex por tabelas	56
4.3 Problema que entra em loop	57
4.4 Resolução de exemplo proposto de PL.....	60
4.5 Conclusão	65

SOBRE OS AUTORES.....66

APRESENTAÇÃO

Neste livro, trazemos temas de Matemática Pura e Matemática Aplicada, estudados no âmbito do campus IV da Universidade Federal da Paraíba por meio de projetos de pesquisa, ou trabalho final de conclusão de curso de estudantes da graduação. Em particular, os capítulos aqui encontrados têm uma unicidade de tratarem fortemente de contextos de Matemática Aplicada, porém com o rigor de demonstrações em Matemática Pura.

No capítulo 1, os autores apresentam uma técnica para calcular as três raízes de qualquer função polinomial de grau três. Utilizam conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, o método numérico de Newton-Raphson para o cálculo de raízes de funções, divisão polinomial, e a tradicional fórmula de Bháskara. De modo a agilizar os cálculos, ensinam como implementar computacionalmente o método de Newton-Raphson em um software de planilha eletrônica e exibem a solução de exemplos, além de como utilizar a metodologia para obter o valor de raízes cúbicas de números.

No segundo capítulo, partindo de um caráter lúdico, buscando figuras da internet associadas com a razão áurea, ou número de ouro, os autores apresentam as teorias matemáticas relacionadas à sequência de Fibonacci. Por meio de um estudo bibliográfico, definem a fórmula da sequência de Fibonacci enquanto recorrência linear de ordem dois para então observá-la como sequência real, mostram de forma numérica como obter o número de ouro por meio da sequência de Fibonacci e concluem que a sequência de Fibonacci pode ser utilizada como ponto de partida na introdução de diversos temas matemáticos.

O capítulo 3 tem um teor voltado à Computação Gráfica, pois são apresentadas as curvas de Bézier no plano por dois caminhos diferentes, polinômios de Bernstein e algoritmo de De Casteljau. Em seguida, os autores focam o estudo em curvas de Bézier cúbicas, pelo fato de serem curvas suaves e simples de lidar. Mostram também algumas propriedades e formas de manipulação por meio de transformações afins. Usando a calculadora digital GeoGebra, implementam e explicam um método de como trabalhar com curvas de Bézier cúbicas, conectando-as de maneira a formar desenhos feitos à mão livre, e algoritmos utilizados no design de tipografia de caracteres de fontes.

O quarto capítulo é dedicado ao Método Simplex, procedimento utilizado na resolução de problemas de Programação Linear. Os problemas de Programação Linear têm relação com questões gerenciais, auxiliando na tomada de decisões. Porém, o texto do autor trata da resolução de dois problemas abstratos com a utilização do Método Simplex por tabelas, exibindo uma questão que entra em loop, uma falha no método, e esmiuçando o passo a passo da metodologia de um exemplo proposto, exibindo quando o método é finalizado e a solução ótima é alcançada.

José Laudelino de Menezes Neto

CAPÍTULO 1

CALCULANDO AS RAÍZES DE UM POLINÔMIO DE GRAU TRÊS POR MEIO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Romildo Rodrigues da Silva Regis Junior

José Laudelino de Menezes Neto

1.1 Introdução

Todas as funções $f(x)$ consideradas neste texto são funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz de $f(x)$ quando $f(x_0) = 0$. Toda função polinomial de grau $n > 0$ do tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0,$$

possui n raízes reais, ou imaginárias.

A fórmula para se obter a única raiz real x_0 de uma função do primeiro grau, definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é bem conhecida e é dada por

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Tal como ela, existe também a fórmula para o cálculo das duas raízes x_1 e x_2 da equação de grau dois, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

A fama de ambas as fórmulas é conhecida desde estudantes do ensino fundamental a estudantes do ensino superior. Por outro lado, a técnica para determinar as raízes de uma função polinomial de grau três, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, é pouco difundida. Uma fórmula

para se determinar as raízes de um polinômio de grau três é encontrada no artigo (Lima, 1987, p. 16). Porém, formas de resolução de equações polinomiais de grau três é um tópico debatido entre matemáticos e estudiosos desde há muito tempo. Inclusive, foi motivo de um duelo matemático entre Niccolò Tartaglia e Ludovico Ferrari, no século XVI (Viana, 2022).

Neste trabalho, temos por objetivo apresentar um método para determinar todas as três raízes de uma função polinomial de grau três. Diferente do apresentado em (Lima, 1987), aqui usamos o conhecido método de Newton-Raphson para o cálculo de raízes de funções (Andrade, 2016, p. 21), (Lima, 2006, p. 110). Também explicamos como implementar o método de Newton-Raphson de modo computacional, por meio do programa Planilhas do Google, e com o uso desta aplicação computacional, mostramos como calcular a raiz cúbica de um número real positivo. Vale ressaltar que o método proposto em um polinômio de grau três, em alguns casos é utilizado para calcular as três raízes de forma exata, e em outros casos é usado para obter as raízes de forma aproximada.

1.2 Metodologia

Para aplicação do método proposto, para determinar as raízes de uma função polinomial de grau três, primeiro provamos, com uso de teorias do Cálculo Diferencial e Integral, que toda função polinomial de grau três possui sempre uma raiz real. Usando essa informação, garantimos que o método numérico de cálculo de raízes de funções de Newton-Raphson converge, ao menos, para uma raiz real do polinômio de grau três. O termo convergir remete ao fato de que o método de Newton-Raphson encontra essa raiz real. Portanto, por meio de uma simples divisão polinomial, reduzimos a função polinomial de grau três para uma função polinomial de grau dois, e usando a fórmula de Bhaskara, deduzimos as duas raízes faltantes.

1.3 Toda função polinomial de grau três tem raiz real

A partir de agora, sempre vamos considerar $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$. Para mostrar que todo polinômio de grau três possui ao menos uma raiz real, primeiro lembramos o fato de que toda função polinomial é contínua (Guidorizzi, 2001, p. 78). Seja $a > 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = ax^3 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3} \right) = -\infty,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = ax^3 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3} \right) = +\infty.$$

Logo, pelo fato de $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$, existe valor $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_1) < 0$, e, pelo fato de $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$, existe valor $x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_2) > 0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário (Guidorizzi, 2001, p. 122), que garante que se $p(x)$ for contínua em um intervalo $[x_1, x_2]$ e se γ é um valor real tal que $p(x_1) < \gamma < p(x_2)$, então existe um x_0 em $[x_1, x_2]$, tal que $p(x_0) = \gamma$, e sendo $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, então escolhemos $\gamma = 0$. Isto garante que a função polinomial de grau três $p(x)$, no caso em que $a > 0$, possui uma raiz real x_0 .

De modo análogo, quando $a < 0$, temos $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$, então existem valores reais x_1 e x_2 tais que $p(x_1) > 0$ e $p(x_2) < 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe x_0 em $[x_1, x_2]$ tal que $p(x_0) = 0$, com $p(x_0) = 0$. Portanto, a função polinomial de grau três $p(x)$, no caso em que $a < 0$, possui uma raiz real x_0 .

Em (Lima, 1987, p. 21) é comprovado que todo polinômio de grau três pode ter três raízes reais distintas, ou três raízes reais sendo duas iguais, ou uma raiz real e duas complexas conjugadas. Em qualquer um dos três casos citados, todo polinômio de grau três tem ao menos uma raiz real.

1.4 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson, que tem esse nome devido a Isaac Newton (1643-1727) e Joseph Raphson (1648-1715), é um procedimento numérico utilizado para o cálculo de raízes de funções deriváveis. A ideia básica desse método é o de que, dada uma função $f(x)$ derivável, com derivada definida por $f'(x)$, e dado um valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, a partir de x_0 é possível traçar retas tangentes ao gráfico da função $f(x)$, de modo que as raízes dessas retas tangentes, denotadas por $x_1, x_2, \dots, x_n$, se aproximem cada vez mais de uma raiz da função

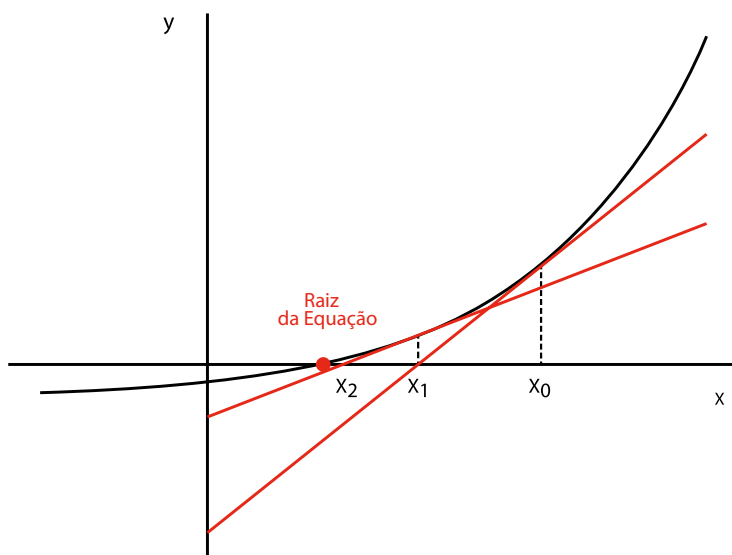
$f(x)$. A repetição desse procedimento é feita até obtermos um valor da raiz de $f(x)$ com uma precisão desejada, ou a raiz exata.

Sendo mais específico, dada a função derivável $f(x)$, iniciamos com um valor inicial x_0 e calculamos a reta $r_0(x)$, tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Sabendo que $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta $r_0(x)$, sua equação é dada por $r_0(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. O próximo valor x_1 é a raiz da reta $r_0(x)$, logo $r_0(x_1) = 0$ e $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$, o que nos leva a deduzir que, se $f'(x_0) \neq 0$, então $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Com este valor de x_1 , se $f(x_1) \neq 0$, então encontramos uma raiz de $f(x)$, caso $f(x_1) = 0$, calculamos a reta tangente $r_1(x)$ tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$, e, desde que $f'(x_1) \neq 0$, determinamos o ponto $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Na Figura 1.1 é exibida a ilustração do método, mostrando o gráfico da função na cor preta, as retas tangentes ao gráfico da função na cor vermelha, e os valores x_0, x_1 e x_2 . Repetindo esse procedimento inúmeras vezes, o quanto for necessário, obtemos uma sequência de valores definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Se em alguma etapa $f'(x_n) = 0$, então reiniciamos o método com outro valor de x_0 .

Figura 1.1 – Ilustração do método de Newton-Raphson com os valores das iterações x_0, x_1 e x_2 .



Fonte: Autoria própria.

O bom funcionamento do método de Newton-Raphson está intrinsicamente ligado a escolha do valor inicial x_0 , pois dependendo de sua escolha, o método pode não funcionar a contento. Entretanto, não temos como saber antecipadamente se a escolha do x_0 é boa ou ruim, tudo depende de aplicar o método e observar os valores gerados. Para a função $p(x) = -x^3 + x$, se for escolhido o valor $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ o método de Newton-Raphson entra em um loop infinito (Lima, 2006, p. 112), com $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, e esses valores ficam se alternando indefinidamente. Já no caso da função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, é claro que 1 é raiz da função, porém se for escolhido o valor $x_0 = 1,84$ e aplicado o método de Newton-Raphson, as iterações tendem a se afastar cada vez mais dessa raiz, e o método continua com as iterações sem parar (Andrade, 2016, p. 22).

Para o caso específico de uma função polinomial de grau três, $p(x)$, geramos a fórmula das iterações, de maneira que uma pessoa que não conheça o assunto de derivadas possa utilizá-la. A derivada de $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é dada por $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, logo, a fórmula do método de Newton-Raphson tem a seguinte expressão

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{ax_n^3 + bx_n^2 + cx_n + d}{3ax_n^2 + 2bx_n + c}.$$

Portanto, para calcular numericamente uma raiz da função polinomial de grau três, basta aplicar a fórmula acima, fornecendo um valor inicial x_0 e calculando as iterações. Como provamos que toda função polinomial de grau três sempre possui uma raiz real, então o método de Newton-Raphson, com uma boa escolha de , sempre vai encontrar, ao menos, essa raiz real.

No método de Newton-Raphson, além do critério de parada ser o de encontrar uma raiz exata para a função, podemos determinar um número máximo de iterações, ou usar a fórmula de erro absoluto, que consiste em calcular $\epsilon = |x_n - x_{n-1}|$ e escolher um determinado valor para esse erro absoluto ser menor. Neste texto, vamos adotar um dos dois critérios de parada a seguir, que o erro absoluto ϵ seja menor do que 0,00001, ou se encontrarmos uma raiz exata da função. A escolha que fazemos dos x_0 nos exemplos aqui elencados foram feitas ao acaso.

Aplicamos a fórmula do método de Newton-Raphson para o caso de polinômios de grau três, na função $p_1(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$ com x_0 . Nesse caso, $a = -1, b = 6, c = -11$ e $d = 6$. Na primeira iteração,

$$x_1 = 0 - \frac{-0^3 + 6 \cdot 0^2 - 11 \cdot 0 + 6}{-3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 6 \cdot 0 - 11} = \frac{6}{11} \approx 0,545455,$$

onde o símbolo “ $\approx$ ” denota valor aproximado. Com o valor de x_1 , calculamos o primeiro erro absoluto $\epsilon = |x_1 - x_0| \approx 0,545455$ e observamos que $p_1(x_1) \neq 0$. Logo, não atingimos critério de parada algum, e calculamos a segunda iteração

$$x_2 = \frac{6}{11} - \frac{-\left(\frac{6}{11}\right)^3 + 6\left(\frac{6}{11}\right)^2 - 11\left(\frac{6}{11}\right) + 6}{-3 \cdot \left(\frac{6}{11}\right)^2 + 2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{6}{11}\right) - 11} = \frac{6042}{7117} \approx 0,848953.$$

Com o valor de x_2 , calculamos o segundo erro absoluto $\epsilon = |x_2 - x_1| \approx 0,303498$ e observamos que $p_1(x_2) \neq 0$, ou seja, ainda não atingimos algum critério de parada.

Continuando com as iterações, construímos a Tabela 1.1, onde a primeira coluna n representa o número da iteração, a segunda coluna o valor de x_n , a terceira coluna é o valor de x_n aplicado em $p_1(x)$, a quarta coluna é o valor de x_n aplicado em $p_1'(x)$, e a quinta coluna o cálculo do erro absoluto ϵ .

Tabela 1.1 – Método de Newton-Raphson aplicado em $p_1(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

n	x_n	$p_1(x_n)$	$p_1'(x_n)$	ϵ
0	0,000000	6,000000	-11,000000	–
1	0,545455	1,6228340	-5,347107	0,545455
2	0,848953	0,373985	-2,974726	0,303498
3	0,974674	0,052592	-2,153880	0,125720
4	0,999092	0,001819	-2,005453	0,024417
5	0,999999	0,000002	-2,000007	0,000907
6	1,000000	0,000000	-2,000000	0,000001

Fonte: Elaboração própria.

Na sexta iteração, $x_6=1$ com $p_1(x_6)=0$, além disso $\epsilon=|x_6-x_5|<0,00001$, chegamos em dois critérios de parada.

1.5 Planilhas e o método de Newton-Raphson com polinômios de grau três

Para facilitar as contas, implementamos o método de Newton-Raphson em uma planilha eletrônica, podendo utilizar a Planilha do Google, uma planilha do Excel, uma planilha do LibreOffice Calc, ou qualquer outra equivalente. Neste trabalho, optamos por utilizar a Planilha do Google, disponível de forma online no endereço <https://docs.google.com/spreadsheets>, e para ter acesso é necessário estar logado em uma conta do Google.

Na planilha, nas células A1, B1, C1 e D1, digitamos respectivamente os valores dos coeficientes a, b, c e d do polinômio de grau três $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Na célula A2, escrevemos o índice de valor zero, para representar a iteração $n=0$. Na célula B2, digitamos o comando o valor desejado de x_0 . Na célula C2, escrevemos o comando “=A\$1*(B2^3)+B\$1*(B2^2)+C\$1*B2+D1”, que representa o cálculo de $p'(x)$ para o valor x igual ao valor escrito na célula B2. Na célula D2, escrevemos o comando “=3*A\$1*(B2^2)+2*B\$1*B2+C\$1”, que representa o cálculo de $p'(x)$ para o valor x igual ao valor escrito na célula B2. Para o caso em que $p(x)=p_1(x)=-x^3+6x^2-11x+6$, o resultado do que foi feito até o momento na planilha é exibido na Figura 1.2.

Figura 1.2 – Início da implementação do método de Newton-Raphson em uma planilha Google.

C2	A	B	C	D	E
1	-1	6	-11	6	
2	0	0	6	-11	
3					

Fonte: Autoria própria.

Na mesma planilha, na célula A3, escrevemos o comando “=A2+1”. Na célula B3, digitamos o comando “=B2-(C2/D2)”, que é o cálculo do valor $x_1=x_0-\frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$. Nas células C3 e D3, escrevemos comandos semelhantes aos que foram digitados nas células C2 e D2, respectivamente, ou seja, em C3 adicionamos o comando “=A\$1*(B3^3)+B\$1*(B3^2)+C\$1*B3+D1”, e em D3 “=3*A\$1*(B3^2)+2*B\$1*B3+C\$1”. Na célula E3, escrevemos o comando

para calcular o primeiro erro absoluto $\epsilon = |x_1 - x_0|$, “=ABS(B3-B2)”. Feito isso, a planilha fica conforme exibido na Figura 1.3.

Figura 1.3 – Implementação das células A3, B3, C3, D3 e E3.

D3	=3*A\$1*(B3^2)+2*B\$1*B3+C\$1				
	A	B	C	D	E
1	-1	6	-11	6	
2	0	0	6	-11	
3	1	0,5454545455	1,62283997	-5,347107438	0,5454545455

Fonte: Autoria própria.

Para etapa seguinte, basta selecionar a terceira linha da planilha, ou seja, selecionar as células A3 a E3, e, com o cursor do mouse, arrastar a bolinha azul para baixo, isso gera o cálculo automático das iterações seguintes do método de Newton-Raphson. Esse cálculo pode ser feito quantas vezes forem necessárias. Se tudo for feito corretamente, o resultado é o exibido na Figura 1.4, onde temos os valores da iteração $n=0$ até a iteração $n=8$. A Tabela 1.1 foi gerada com o auxílio dessa planilha, considerando até seis casas decimais.

Figura 1.4 – Método de Newton-Raphson implementado em uma planilha Google.

A3:E10	=A2+1				
	A	B	C	D	E
1	-1	6	-11	6	
2	0	0	6	-11	
3	1	0,5454545455	1,62283997	-5,347107438	0,5454545455
4	2	0,8489532106	0,373985129	-2,974726134	0,3034986652
5	3	0,974674071	0,05259231011	-2,153879782	0,1257208604
6	4	0,9990915481	0,001819380491	-2,005453188	0,02441747703
7	5	0,9999987647	0,000002470622467	-2,000007412	0,0009072166341
8	6	1	0	-2	0,000001235306656
9	7	1	0	-2	0
10	8	1	0	-2	0

Fonte: Autoria própria.

1.6 Calculando as outras duas raízes

Utilizando o método de Newton-Raphson descobrimos que é raiz de $p_1(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$, ou seja, $p_1(1) = 0$. Para calcular as outras duas raízes de $p_1(x)$, usamos os conceitos de divisão polinomial. Mais detalhes sobre divisão polinomial podem ser vistos no capítulo 6 do livro (Domingues e Iezzi, 2005).

Em geral, sendo $P(x)$ um polinômio de grau $n > 0$, então podemos dividir $P(x)$ por $x - a$, ou seja, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $P(x) = q(x) \cdot (x - a) + r(x)$. Em particular, se $P(a) = 0$, então $r(x) = 0$.

Dividindo $p_1(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$ por $x - 1$, obtemos $q(x) = -x^2 + 5x + 6$ e $r(x) = 0$. Os passos desta divisão são encontrados na Figura 1.5. Logo, $p_1(x) = (-x^2 + 5x + 6) \cdot (x - 1)$, e as outras duas raízes de $p_1(x)$ estão no polinômio de grau dois $q(x) = -x^2 + 5x + 6$. Aplicando a fórmula de Bhaskara em $q(x)$, chegamos aos valores 2 e 3. Portanto, $p_1(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$ possui três raízes reais, são elas 1, 2 e 3. Aqui determinamos as três raízes exatas de $p_1(x)$.

Figura 1.5 – Divisão polinomial de $p_1(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$ por $x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 -x^3 + 6x^2 - 11x + 6 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{+x^3 - x^2} \quad \quad -x^2 + 5x + 6 \\
 5x^2 - 11x + 6 \\
 \underline{-5x^2 + 5x} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{6x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

1.7 Fixando o método

De acordo com tudo que foi provado e exemplificado anteriormente, o método apresentado é eficiente para o cálculo numérico das três raízes de uma função polinomial de grau três. Para fixar melhor os passos do método, vamos calcular as três raízes do polinômio $p_2(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$. Neste caso, $a=1, b=-2, c=-3$ e $d=5$ e . Escolhendo $x_0=2$, usando a planilha do Google previamente construída e escrevendo, respectivamente, esses novos valores de a, b, c, d e x_0 nas células A1, B1, C1, D1 e B2, o resultado obtido é exibido na Figura 1.6.

Figura 1.6 – Cálculo da raiz de $p_2(x)=x^3-2x^2-3x+5$ pelo método de Newton-Raphson iniciando com $x_0=2$.

	A	B	C	D	E
1	1	-2	-3	5	
2	0	2	-1	1	
3	1	3	5	12	1
4	2	2,583333333	1,142939815	6,6875	0,416666667
5	3	2,412426445	0,1629606481	4,809698279	0,1709068882
6	4	2,378544767	0,005973334523	4,45824656	0,03388167794
7	5	2,377204928	0,000009216929822	4,444490095	0,001339839429
8	6	2,377202854	0	4,444468811	0,000002073787909

Fonte: Autoria própria.

Na sexta iteração, chegamos a dois critérios de parada, e na célula B2 temos $x_6=2,377202854$, com $p_2(x_6)=0$ (veja célula C8 na Figura 1.6), além disso $\epsilon=|x_6-x_5|=0,000002073787909<0,00001$ (veja célula E8 na Figura 1.6).

Para calcular as duas raízes restantes, fazemos a divisão polinomial de $p_2(x)$ por $x-x_6$. O procedimento dessa divisão está detalhado na Figura 1.7.

Figura 1.7 – Divisão polinomial de $p_2(x)=x^3-2x^2-3x+5$ por $x-x_6$, onde $x_6=2,377202854$.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 - 3x + 5 \quad | \quad x - 2,377202854 \\
 \underline{-x^3 + 2,377202854x^2} \quad \quad x^2 + 0,377202854x - 2,1033122989 \\
 \hline
 0,377202854x^2 - 3x + 5 \\
 \underline{-0,377202854x^2 + 0,8966877011x} \\
 \hline
 -2,1033122989x + 5 \\
 \underline{+2,1033122989x - 4,999999998} \\
 \hline
 0,000000002
 \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

Dividindo $p_2(x)$ por $x-x_6$, determinamos $q(x)=x^2+0,377202854x-2,1033122989$ e $r(x)=0,000000002$. Pelo fato de x_6 ser uma raiz calculada numericamente, o resto da divisão não deu exatamente zero, porém um valor muito próximo de zero, $r(x)=0,000000002\approx 0$. Considerando $r(x)=0$, $p_2(x)=q(x)\cdot(x-x_6)$, e as outras duas raízes de $p_2(x)$ estão em $q(x)=x^2+0,377202854x-2,1033122989$, então pela fórmula de Bhaskara, calculamos as outras duas raízes 1,27389 e -1,65109, aplicando esses valores em $p_2(x)$, $p_2(1,27389)=0,0000017909648688529956\approx 0$ e $p_2(-1,65109)=0,0000401664\approx 0$. Aqui determinamos três raízes aproximadas de $p_2(x)$.

1.8 Resolvendo problema proposto por Euler

Em (Lima, 1987, p. 17) são apresentados alguns exemplos propostos por Leonard Euler (1707-1783), em seu livro escrito em 1770, um deles é a obtenção das raízes de $p_3(x)=x^3+3x+2$. Ainda por (Lima, 1987, p. 18), as três raízes de $p_3(x)$ são $r=\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ e as raízes complexas do polinômio de grau dois são x^2+rx+r^2+3 . Calculamos que o valor aproximado de r é $-0,59607$, e as raízes complexas conjugadas de x^2+rx+r^2+3 são, aproximadamente, $0,298035-1,80734 i$ e $0,298035+1,80734 i$, onde i é a unidade imaginária, satisfazendo $i^2=-1$.

Pelo método apresentado aqui neste texto, usando a planilha do Google em $p_3(x)$, onde $a=1, b=0, c=3, d=2$ e iniciando com $x_0=0$, o resultado é o obtido na Figura 1.8.

Figura 1.8 – Cálculo da raiz de $p_3(x)=x^3+3x+2$ pelo método de Newton-Raphson iniciando com $x_0=0$.

	A	B	C	D	E
1	1	0	3	2	
2	0	0	2	3	
3	1	-0,6666666667	-0,2962962963	4,333333333	0,6666666667
4	2	-0,5982905983	-0,009030895728	4,07385492	0,06837606838
5	3	-0,5960738046	-0,000008809418774	4,065911942	0,002216793653
6	4	-0,596071638	0	4,065904193	0,000002166652623

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 1.8, o valor da raiz de $p_3(x)$ é encontrado na quarta iteração, $x_4=-0,596071638$, e coincide com o valor aproximado da raiz $r\approx-0,59607$.

Fazendo a divisão polinomial de $p_3(x)$ por $x-x_4$ por , obtemos os polinômios $q(x)=x^2-0,596072x+3,3553$ e $r(x)=-0,000000001$ tais que $p_3(x)=(x-x_4)\cdot q(x)+r(x)$. Detalhes dessa divisão polinomial são encontrados na Figura 1.9. Sendo $r(x)$ muito próximo de zero, consideramos $p_3(x)=(x-x_4)\cdot q(x)$, logo as duas raízes restantes de $p_3(x)$ são as raízes de $q(x)=x^2-0,596072x+3,3553$, sendo elas $0,298036-1,80734 i$ e $0,298036+1,80734 i$. Obtivemos as mesmas raízes de $p_3(x)=x^3+3x+2$ descritas em (Lima, 1987).

Figura 1.9 – Divisão polinomial de $p_3(x)=x^3+3x+2$ por $x-x_4$, com $x_4=-0,596071638$.

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x + 2 \quad | \quad x + 0,596071638 \\
 -x^3 - 0,596071638x^2 \quad \quad x^2 - 0,596071638x + 3,3553013976 \\
 \hline
 -0,596071638x^2 + 3x + 2 \\
 +0,596071638x^2 + 0,3553013976x \\
 \hline
 3,3553013976x + 2,000000000 \\
 -3,3553013976x - 2,000000001 \\
 \hline
 -0,000000001
 \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

1.9 Discussão do método apresentado

Conforme visto nos três exemplos comentados, o método se mostrou eficaz, pelo fato de todo polinômio de grau três $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sempre ter, pelo menos, uma raiz real. O método numérico de Newton-Raphson sempre vai parar em determinada iteração n , encontrando esta raiz real, denominada de x_n , desde que o valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ seja uma boa escolha. Caso não seja, muda-se o valor de x_0 e reinicia-se o método de Newton-Raphson até encontrar a raiz x_n .

Sendo o método de Newton-Raphson um procedimento numérico, de aproximação, em alguns casos encontramos a raiz real x_n de forma exata, ou seja, $p(x_n)$ é exatamente igual a zero, em outros casos encontramos uma raiz aproximada, com $p(x_n)$ sendo aproximadamente igual a zero.

Quando x_n é raiz exata, então dividindo $p(x)$ por $x-x_n$, determina-se polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $r(x)=0$ e $p(x)=(x-x_n) \cdot q(x) + r(x) = (x-x_n) \cdot q(x)$, sendo $q(x)$ um polinômio de grau dois. Então, para encontrar as outras duas raízes restantes de $p(x)$, de forma exata, usamos a fórmula de Bhaskara em $q(x)$.

No caso em que x_n é raiz aproximada, então na divisão de $p(x)$ por $x-x_n$, o polinômio $r(x)$ não é zero, mas sim um valor muito próximo de zero, por isso consideramos $r(x) \approx 0$, e obtemos, como no caso da raiz exata, discutido no parágrafo anterior, $p(x)=(x-x_n) \cdot q(x)$, sendo $q(x)$ um polinômio de grau dois. Logo, usamos a fórmula de Bhaskara em $q(x)$ para encontrar, de modo aproximado, as duas raízes restantes de $p(x)$.

Os exemplos exibidos anteriormente, polinômios de grau três $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$, possuem coeficientes a, b, c e d inteiros. Na implementação do método de Newton-Raphson na planilha Google, se um dos coeficientes do polinômio de grau três não for inteiro, ou for necessário digitar algum valor que não seja inteiro em alguma célula da planilha, então o recomendado é usar o comando “=” antes do valor. Por exemplo, caso seja necessário digitar $\frac{3}{5}$, então escreve-se “=3/5” na célula. Se for necessário digitar algum outro valor, como $\sqrt{5}$, então é necessário verificar a lista de funções da planilha do Google em (Google, 2024). Outra solução é usar uma calculadora e escrever o valor aproximado retornado pela calculadora. No caso de $\sqrt{5}$, o comando na planilha Google é “=SQRT(5)”, ou usando uma calculadora, $\sqrt{5} \approx 2,236068$ e digitamos “=2,236068”. Para evitar problemas, pode-se sempre usar o comando “=” antes de qualquer valor.

Para o polinômio $p_4(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{13x^2}{5} - \frac{4}{3}$, e valor inicial $x_0 = \frac{24}{8}$, na planilha Google, digitamos respectivamente nas células A1, B1, C1, D1 e B2, os valores “=-1/2”, “=13/5”, “=0”, “=-4/3” e “=24/8”. Na quarta iteração, obtemos o valor da raiz $x_4 = 5,097369486$, com erro absoluto $\epsilon = 0,0000002300816115$ (Figura 1.10).

Figura 1.10 – Método de Newton-Raphson aplicado em $p_4(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{13x^2}{5} - \frac{4}{3}$ com $x_0 = \frac{24}{8}$.

D1	A	B	C	D	E
1	-0,5	2,6	0	-1,333333333	
2	0	4,8	3,274666667	-9,6	
3	1	5,141111111	-0,5550865316	-12,91275741	0,3411111111
4	2	5,09812366	-0,009406237361	-12,47605424	0,0429874514
5	3	5,097369716	-0,000002868759812	-12,46844451	0,0007539432882
6	4	5,097369486	0	-12,46844219	0,0000002300816115

Fonte: Autoria própria.

1.10 Calculando raízes cúbicas

Seja $d > 0$ um número real, considerando a função $p_5(x) = x^3 - d$, o valor $\sqrt[3]{d}$ é uma raiz de $p_5(x)$. Logo, $p_5(x)$ é fatorado da seguinte forma, $p_5(x) = (x - \sqrt[3]{d})(x^2 + \sqrt[3]{d}x + \sqrt[3]{d^2})$, e o polinômio de grau $x^2 + \sqrt[3]{d}x + \sqrt[3]{d^2}$ tem discriminante $\Delta = -3\sqrt[3]{d^2} < 0$. Com base nessa discussão, a única raiz real de $p_5(x) = x^3 - d$ é $\sqrt[3]{d}$.

Dado um valor real $d > 0$, para sabermos o valor de $\sqrt[3]{d}$, só precisamos executar o método de Newton-Raphson na planilha

eletrônica no polinômio de grau três na forma $p_5(x)=x^3-d$. Por exemplo, para calcularmos $\sqrt[3]{2}$, usamos $p_5(x)=x^3-2$. Na planilha Google, digitamos, respectivamente, nas células A1, B1, C1, D1 e B2, os valores “=1”, “=0”, “=0”, “=0” e “=-2”, e iniciamos com o valor arbitrário $x_0=1$. O resultado encontrado é $x_5=1,25992105$, e $x_5^3=(1,25992105)^3=2,000000001$, isto é, $\sqrt[3]{2}\approx 1,25992105$.

Para o caso em que $d=11$, $p_5(x)$ é igual a x^3-11 , e aplicando o método de Newton-Raphson na planilha Google, com $x_0=1$, obtemos $x_7=2,223980091$. Ou seja, encontramos que, $\sqrt[3]{11}\approx 2,223980091$.

Os valores encontrados são boas aproximações para $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{11}$.

1.11 Conclusão

Neste texto, apresentamos um procedimento efetivo para calcular as três raízes de uma função polinomial de grau três, $p:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definida por $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$. Verificou-se que todas as funções polinomiais de grau três tem pelo menos uma raiz real e que com isso é possível aplicar o método de Newton-Raphson, esse sendo um método iterativo simples e eficiente para descobrir uma raiz a partir de um valor inicial e de um índice de erro. Pelo fato do método de Newton-Raphson ser numérico, fica mais fácil sua utilização de maneira computacional, portanto uma aplicação por meio do *software* Planilha Google foi executada, ensinando todos os passos da sua implementação. Com a raiz real encontrada, fizemos uma divisão polinomial para usar a fórmula de Bhaskara e determinar as duas raízes faltantes de $p(x)$, que não necessariamente são raízes reais. Utilizando o programa criado computacionalmente por meio da Planilha do Google, exibimos como calcular raízes cúbicas de números reais positivos.

A utilização dos métodos aqui descritos pode servir como motivação para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, visto exibir uma forma de programar o método de Newton-Raphson em um *software*. Além disso, indicamos uma fórmula acessível do método de Newton-Raphson, permitindo que pessoas que tenham pouco ou nenhum conhecimento sobre derivada, possam usufruir desse método em funções polinomiais de grau três, então tal assunto também pode ser ministrado no Ensino Básico, como uma maneira de usar ferramentas computacionais, e aplicar as metodologias de divisão polinomial.

Referências

ANDRADE, Lenimar Nunes de. **Cálculo numérico: introdução à matemática computacional**. Departamento de Matemática. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/~lenimar/textos/numerv2.pdf>.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4.ed. São Paulo: Atual, 2003.

GOOGLE. **Ajuda do Editores de Documentos do Google**, © 2024. Lista de funções das Planilhas Google. Disponível em: <https://support.google.com/docs/table/25273?hl=pt-BR>. Acesso em: 23 ago. 2024.

GUIDORIZZI, L. H. **Um curso de cálculo: volume 1**. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LIMA, Elon Lages. A equação do terceiro grau. **Revista Matemática Universitária**, n. 5, p. 9-23, jun. 1987. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo01.pdf.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1**. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

VIANA, Marcelo. Na Folha, Viana fala sobre a guerra da equação cúbica. **Instituto de Matemática Pura e Aplicada**, 2022. Disponível em: <https://impa.br/noticias/na-folha-viana-fala-sobre-a-guerra-da-equacao-cubica/>. Acesso em: 23 ago. 2024.

CAPÍTULO 2

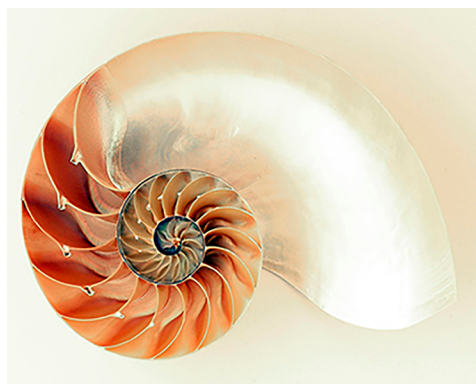
SEQUÊNCIA DE FIBONACCI, RECORRÊNCIA E O NÚMERO DE OURO

Ruan Bosco Gomes de Brito
José Laudelino de Menezes Neto

2.1 Introdução

Na rede mundial de computadores, a internet, circulam notícias que tratam da razão áurea, ou número de ouro. Essas notícias exibem uma proporção simétrica em forma de espiral em imagens da natureza, uma concha (veja Figura 2.1), em copas de árvores, e em pinturas. Existe uma relação dessa proporção áurea com a sequência de Fibonacci, e a espiral.

Figura 2.1 – Imagem de uma concha com a forma de espiral.



Fonte: <https://www.pexels.com/pt-br/foto/concha-do-mar-laranja-e-branca-na-superficiebranca-33234/>, imagem de domínio público.

A sequência de Fibonacci é uma teoria que surgiu por meio da pesquisa de Leonardo de Pisa, um matemático nascido na Itália, por volta do ano de 1170. O seu apelido, Fibonacci, possivelmente surgiu do fato de ser filho de Guglielmo Bonacci, como sendo um diminutivo do termo “filho de Bonacci”. O registro desse tema da sequência de

Fibonacci encontra-se como um problema proposto no livro escrito por ele, *Liber Abaci*, numa tradução livre “Livro de cálculos”.

O problema é apresentado da seguinte maneira:

Problema 2.1: Considere um par de coelhos recém-nascidos, sendo um macho e uma fêmea, colocados em um campo. Supomos que os coelhos são capazes de se reproduzir com a idade de um mês e a fêmea possui um período de gestação de mesmo tempo, de forma que, no final do segundo mês, uma fêmea dá à luz um novo casal de coelhos. Temos também, por hipótese, que os coelhos nunca morrem e que, a partir do final de todo mês, cada fêmea adulta continua reproduzindo exatamente um macho e uma fêmea. Quantos pares de coelhos temos ao final de um ano?

Uma solução para este Problema 2.1 é dada a partir da análise que segue (Ramos, 2013):

- no primeiro mês, temos apenas um par de coelhos filhotes;
- no segundo mês, os filhotes viraram adultos, o casal acasala, continuando um par de coelhos;
- no terceiro mês a fêmea dá à luz um novo casal de coelhos, temos dois casais e o casal mais velho acasala mais uma vez;
- no quarto mês a fêmea do casal mais velho dá à luz um novo casal, que logo em seguida acasala novamente. O casal mais novo se torna adulto e acasala. No total temos três casais de coelhos: dois adultos e um filhote;
- no quinto mês, as duas fêmeas mais velhas dão à luz, cada uma, um novo casal de coelhos. O casal mais novo se torna adulto. No total temos cinco casais de coelhos, sendo três casais adultos e dois filhotes;
- a análise continua até chegar ao décimo segundo mês.

Tendo em vista que escrevendo toda a análise, começaria a se tornar confuso, organizamos o procedimento em forma de tabela, prosseguindo até o décimo segundo mês, obtendo a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Quantidade de pares de coelhos mês a mês, do mês 1 ao mês 12.

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pares de coelhos	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Fonte: Elaboração própria.

Portanto, a solução do Problema 2.1 é a de que, ao final do décimo segundo mês, teremos um total de 144 pares de coelhos. Os valores mês a mês, se continuarmos indefinidamente, definem uma sequência numérica infinita, a sequência de Fibonacci,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (2.1)$$

Neste texto, o objetivo é formalizar essa sequência de Fibonacci a partir da definição de sequências reais e, com essa motivação, apresentar e obter, por meio da teoria de recorrências lineares, uma fórmula geral para descrever qualquer termo dessa sequência (2.1). Além disso, como dito no primeiro parágrafo desta Introdução, exibir a relação da sequência de Fibonacci com o número de ouro e a espiral da Figura 2.1.

2.2 Recorrências lineares

O livro *Análise Real* (Lima, 2020) caracteriza formalmente uma sequência real pela Definição 2.1 a seguir.

Definição 2.1: Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o n -ésimo termo da sequência.

Este n -ésimo termo também é conhecido por termo geral.

Exemplo 2.1: A sequência infinita $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, de termo geral $x_n = \frac{2}{n}$, tem os valores dos seus sete primeiros termos dados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Valores da sequência $x_n = \frac{2}{n}$, para $1 \leq n \leq 7$.

n	1	2	3	4	5	6	7
Valor de x_n	2	1	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7

Fonte: Elaboração própria.

Em princípio, podemos escrever a sequência de Fibonacci (2.1) parecida com o que é dito nesta Definição 2.1, basta observarmos que

dados os dois termos iniciais da sequência de Fibonacci, $F_1=1$ e $F_2=1$, temos o termo geral dado por

$$\begin{aligned} F_1=1, F_2=1, \\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n > 2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Assim, podemos calcular os termos F_n para valores de n maiores que dois,

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3, \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5, \dots \end{aligned}$$

Organizando em formato de tabela, igual ao que foi feito para sequência do Exemplo 2.1, obtemos a Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Valores da sequência de Fibonacci definida em (2.2) para .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Fonte: Elaboração própria.

Entretanto, esta fórmula para a sequência de Fibonacci definida em (2.2) não se assemelha a fórmula da sequência x_n dada no Exemplo 2.1, onde o termo geral depende estritamente do valor n , e não de termos anteriores.

As sequências definidas dessa forma, semelhantes ao que está em (2.2), cujo valor dos termos mais à frente deve recorrer aos valores dos termos anteriores, são as sequências definidas por recorrência. Nesse caso em particular, é uma recorrência linear de ordem dois, homogênea, com coeficientes constantes.

Definição 2.2: Uma recorrência linear de ordem dois, homogênea, com coeficientes constantes, é uma sequência real, tal que seu termo geral, para n maior que dois, é dado por

$$x_n = -px_{n-1} - qx_{n-2}, n > 2, \quad (2.3)$$

com p e q números reais e $q \neq 0$.

Existem Teoremas que garantem a escrita do termo geral x_n de uma recorrência linear de ordem dois, em (2.3), como função dependente exclusivamente de n , ou seja, $x_n = f(n)$, ao invés de depender de termos

anteriores, no caso, x_{n-1} e x_{n-2} . Para tanto, associamos a expressão em (2.3) à equação, chamada de equação característica,

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (2.4)$$

e aplicamos os Teoremas a seguir.

Teorema 2.1: Se as raízes da equação em (2.4) são r_1 e r_2 , então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é uma solução da recorrência em (2.3), quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Teorema 2.2: Se as raízes da equação em (2.4) são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência em (2.3) são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, onde C_1 e C_2 são constantes.

As demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2 são encontradas nas referências (Morgado, 2013) e (Moura, 2021). Neste texto aplicamos os Teoremas 2.1 e 2.2 na sequência de Fibonacci para obter seu termo geral, F_n , dependendo somente do valor de n .

2.3 Termo geral da sequência de Fibonacci

O termo geral da sequência de Fibonacci dado em (2.2) é associado a equação característica

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, obtemos as seguintes raízes para esta equação

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Assim, sendo $r_1 \neq r_2$, aplicando os Teoremas 2.1 e 2.2, obtemos o termo geral da sequência de Fibonacci que depende estritamente de n ,

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para determinar os valores das constantes C_1 e C_2 , resolvemos o sistema linear,

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 \end{cases}.$$

Solucionando o sistema acima, $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto, o termo geral da sequência de Fibonacci, dependendo apenas de n , é dado por

$$F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n \geq 1. \quad (2.5)$$

2.4 Número de ouro

O número de ouro é um número pertencente aos reais, e assim como π , ou $\sqrt{2}$, é um número irracional. Seu valor é dado por

$$\varphi = 1.61803399... \quad (2.6)$$

Numericamente falando, a relação da sequência de Fibonacci com o número de ouro é simples. O quociente formado pela divisão de dois termos subseqüentes da sequência de Fibonacci para valores cada vez maiores de n

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

é uma aproximação para o valor do número de ouro.

Por exemplo,

$$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1.61538461..., \quad (2.7)$$

$$\frac{F_{15}}{F_{14}} = \frac{610}{377} = 1.61803713...,$$

$$\frac{F_{20}}{F_{19}} = \frac{6765}{4181} = 1.61803396...$$

Observamos que F_8/F_7 acertou duas casas decimais do número φ em (2.6), já F_{15}/F_{14} cinco casas decimais, e F_{20}/F_{19} sete casas decimais.

Para o cálculo dos valores F_n em (2.7), fizemos uso de um computador para auxiliar nos cálculos e usamos a expressão do termo geral de F_n em (2.5).

2.5 Desenhando a espiral

Em um sistema de coordenadas polares, uma espiral logarítmica é uma curva dada por uma equação da forma (Spira, 2022)

$$r(\theta) = ap^\theta,$$

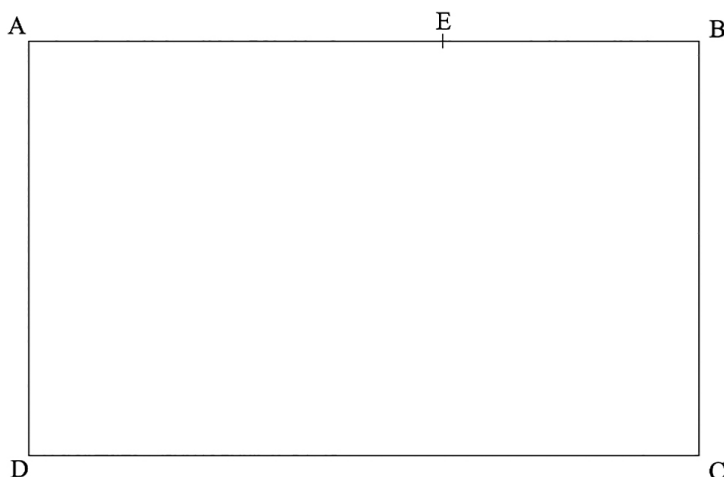
onde a e p são números reais positivos. Nesta seção, ensinamos como desenhar a espiral logarítmica a partir do número de ouro.

Vimos o valor do número de ouro, $\varphi = 1.61803399\dots$, e sua relação com os números de Fibonacci. Resta sabermos a relação da espiral apresentada na Figura 2.1. De forma intuitiva, exibimos uma maneira de como desenhar este tipo de espiral áurea. Pelo fato de as figuras serem feitas no computador, utilizamos o pixel como unidade de medida.

Primeiro, necessitamos de um retângulo $ABCD$ (veja Figura 2.2), de tal forma que seu lado maior, no caso AB , atenda a seguinte condição: podemos dividir o lado AB em duas partes por um ponto E satisfazendo

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|EB|} = \varphi,$$

onde $|XY|$ significa o comprimento do segmento XY . O valor do número de ouro $\varphi = 1.61803399\dots$ também é obtido a partir desta condição (2.8) (Ramos, 2013).

Figura 2.2 – Retângulo $ABCD$.

Fonte: Autoria própria.

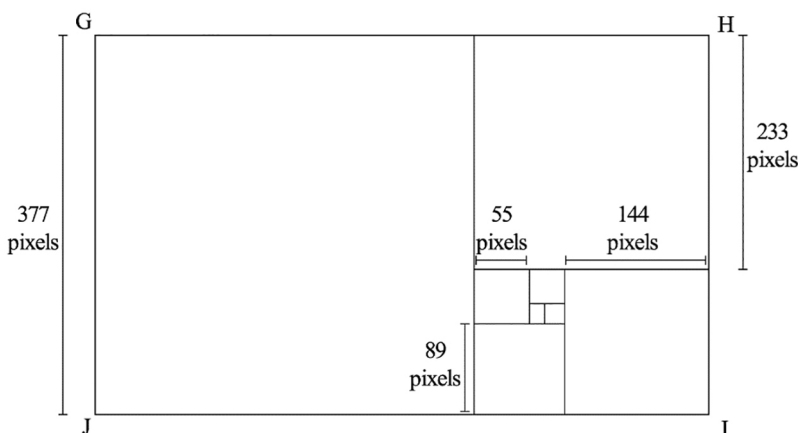
Um modo de construir tal retângulo, satisfazendo de forma aproximada a condição (2.8), é utilizando a sequência de Fibonacci, para tanto vamos utilizar a fórmula geral F_n dada pela equação (2.5).

Consideremos um retângulo $GHIJ$ (Figura 2.3) tal que seu lado maior tem tamanho $F_{15}=610$ pixels e seu lado menor tem tamanho $F_{14}=377$ pixels. Se dividirmos seu lado maior de tamanho $F_{15}=610$ em dois segmentos, um de comprimento $F_{14}=377$ pixels e outro de $F_{13}=233$ pixels, temos

$$1.61803713 \dots = \frac{610}{377} \approx \frac{377}{233} = 1.61802575 \dots$$

Ou seja, o retângulo $GHIJ$ atende a condição (2.8) de forma aproximada.

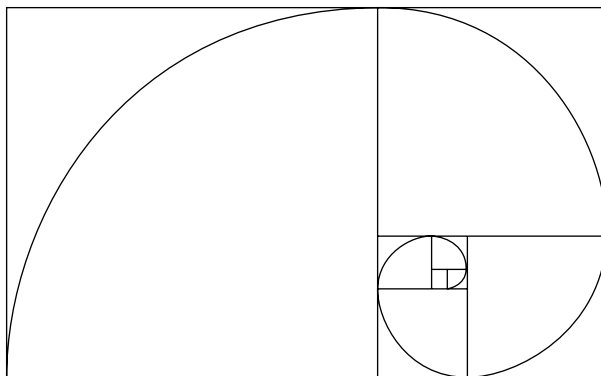
Figura 2.3 – Construção dos quadrados dentro do retângulo $GHIJ$.



Fonte: Autoria própria.

Dentro deste retângulo $GHIJ$, construímos quadrados tal que a medida dos seus lados, segue os valores da sequência de Fibonacci (veja Figura 2.3). Agora, para obter a espiral áurea, dentro de cada quadrado, traçamos um arco de circunferência (Spira,2022), conforme exibido na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Arco de circunferência traçado dentro de cada quadrado no retângulo $GHIJ$, obtendo a espiral.



Fonte: Autoria própria.

2.6 Conclusão

Utilizando a sequência de Fibonacci, vimos ser possível motivar o estudo de sequências reais, recorrências lineares e cálculo numérico. Neste último assunto, pelo fato de fazermos uma aproximação numérica em (2.7) do número de ouro, podemos inclusive calcular o erro dessas aproximações.

Além disso, caso fôssemos estudar mais a fundo, poderíamos adentrar no assunto de Indução Matemática verificando certas propriedades atendidas pela sequência de Fibonacci (Morgado, 2013). Algumas propriedades ainda requereriam o conhecimento em Teoria dos Números (Moura, 2021). Se fôssemos verificar como obter de forma mais detalhada a espiral relacionada ao número de ouro e a sequência de Fibonacci, exibidas nas Figuras 2.1 e 2.4, teríamos de estudar geometria (Moura, 2021), (Spira, 2022).

Referências

LIMA, E. L. **Análise Real - vol. 1 - Funções de uma Variável**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020.

MORGADO, A. C. de O.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013.

MOURA, Y. T., A razão áurea e os números de Fibonacci, **Professor de Matemática Online**, vol. 9, n. 2, p. 369-388, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo926>. Acesso em 08/06/2022.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Santa Cruz, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2013. Disponível em: <http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf>. Acesso em 28/05/2022.

SPIRA, M. A espiral logarítmica e o logo da SBM, **Revista Matemática Universitária**, vol. 2, p. 1-12, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/26755254/rmu20216>. Acesso em 22/06/2022.

CAPÍTULO 3

COMPUTAÇÃO GRÁFICA E CURVAS DE BÉZIER CÚBICAS

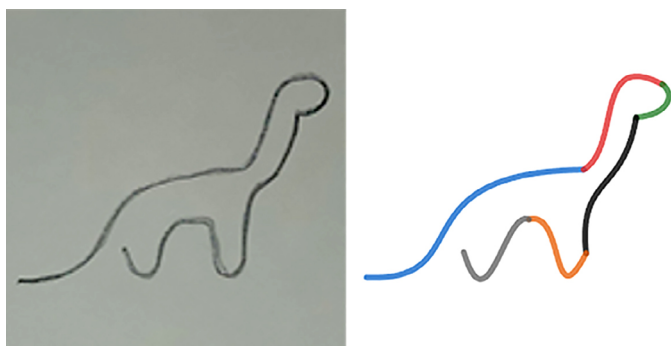
Elenilson Justino de Oliveira
José Laudelino de Menezes Neto

3.1 Introdução

A Matemática contribui para o desenvolvimento de inovações e soluções práticas de situações do mundo real, e uma área particular onde vemos esse fato é a Computação Gráfica, dedicada à criação, manipulação e representação de elementos visuais.

Dado um desenho feito a mão livre, é difícil deduzir a equação de uma curva plana, ou várias curvas planas, das que conhecemos em um curso de Geometria Diferencial (Tenenblat, 2008), de tal maneira que o traçado dessa curva, ou dessas curvas, seja semelhante ao desenho. Uma maneira de criar elementos visuais, e de obter as equações de curvas que sejam semelhantes a um desenho, pode ser por meio da implementação computacional de curvas de Bézier (veja Figura 3.1), curvas paramétricas onde se pode manipular e modelar sua forma suave e precisa por meio de pontos de controle previamente dados $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$ (Viana, 2024). A imagem à esquerda na Figura 3.1 foi feita a mão livre, e à direita utilizando o GeoGebra, uma calculadora digital online, gratuita, acessível pelo endereço <https://geogebra.org>.

Figura 3.1 – À esquerda desenho feito a mão livre e à direita são seis curvas de Bézier cúbicas, que estão conectadas de tal maneira que seu formato se assemelha ao desenho.



Fonte: Autoria própria.

As curvas de Bézier são geradas a partir de coordenadas ponderadas dos $n+1$ pontos de controle, onde a curva inicia no ponto P_0 e termina no ponto P_n e não necessariamente passa nos pontos intermediários $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$, sendo, portanto, uma curva de aproximação, e não de interpolação. Uma curva de interpolação passa em todos os pontos de controle dados (Andrade, 2016).

Por meio da Computação Gráfica, a utilização de curvas de Bézier é vasta, desde o traçado de desenhos feitos a mão livre, design de carros (Almeida, 2015; Alves, 2021; Farin, 2002; Pereira, 2022), design de roupas (Alves 2021), até a criação de tipografia de fontes (Machado, 2013; Pereira, 2022; Santos, 2015), dentre outras aplicações.

Focamos nosso estudo nas curvas de Bézier cúbicas, por conta da sua maleabilidade em obtenção de formas sinuosas, e pelo baixo custo do ponto de vista computacional (Van Verth *et al*, 2015). Além disso, fica mais fácil para exibir as propriedades intrínsecas às curvas de Bézier.

Os trabalhos de (Itoh & Ohno, 1993) e (Schneider, 1990) descrevem algoritmos usados no design de fontes tipográficas usando curvas de Bézier cúbicas. Seguindo esses textos de (Itoh & Ohno, 1993) e (Schneider, 1990), apresentamos de modo prático a ideia de sua aplicação por meio do GeoGebra.

O restante deste capítulo é dividido da seguinte forma: na seção 3.2, apresentamos as curvas planas, que são curvas parametrizadas diferenciáveis no $\mathbb{R}^2$; na seção 3.3, definimos curvas de Bézier no plano por meio dos polinômios de Bernstein e pelo algoritmo de De Casteljau; na seção 3.4, destacamos algumas propriedades das curvas de Bézier, com ênfase em curvas de Bézier cúbicas; na seção 3.5, como

uma maneira de aplicar o conteúdo estudado na Computação Gráfica, descrevemos os procedimentos feitos no GeoGebra para confeccionar a Figura 3.1; na seção 3.6 explicamos, de modo geral, o funcionamento de algoritmos usando curvas de Bézier cúbicas para o design tipográfico de fontes, com base nos textos (Itoh & Ohno, 1993) e (Schneider, 1990).

3.2 Curvas parametrizadas

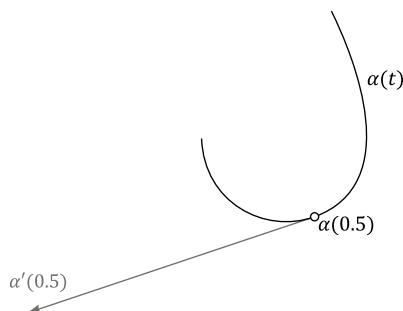
Uma curva parametrizada diferenciável no plano é uma aplicação $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo dos reais $I=[a,b]$ e representada por $\alpha(t)=(x(t),y(t))$, onde $x(t),y(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ no intervalo aberto $]a,b[$ (Tenenblat, 2008). As funções $x(t),y(t)$ são conhecidas como funções coordenadas, t é chamado de parâmetro e o conjunto imagem $\alpha(I)$ é a trajetória descrita pela curva α quando o parâmetro t varia ao longo do domínio I . O conjunto $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ também é conhecido como traço de α .

O vetor tangente ao traço da curva $\alpha(t)$, em $t \in]a,b[$, definido como

$$\alpha'(t)=(x'(t),y'(t)),$$

descreve a direção da curva no ponto $t \in]a,b[$, onde a linha denota a derivada em função de t . Uma curva parametrizada é regular se $\alpha'(t) \neq 0$. Isso implica que a curva não possui pontos de dobras ou paradas bruscas em seu traço, garantindo uma trajetória suave e contínua ao longo do intervalo $]a,b[$.

Figura 3.2 – Curva $\alpha(t)=(5t^3-9t^2+3t+2,-t^3+6t^2-6t+2)$ definida no intervalo $I=[0,1]$, e vetor tangente $\alpha'(0.5)$ posicionado sobre o traço da curva no ponto $\alpha(0.5)$.



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 3.1: Na Figura 3.2 temos a curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (5t^3 - 9t^2 + 3t + 2, -t^3 + 6t^2 - 6t + 2),$$

onde $I = [0, 1]$. Para o intervalo aberto $]0, 1[$,

$$\alpha'(t) = (15t^2 - 18t + 3, -3t^2 + 12t - 6),$$

e para $t = 0.5$ o vetor tangente em $\alpha(0.5)$ é igual a $(-2.25, -0.75)$.

A reparametrização de curvas é um processo que envolve a modificação da forma como uma curva é percorrida por meio do parâmetro t ao longo do intervalo I . Isso é feito pela escolha de uma nova função de parâmetro, que preserva a representação e diferenciabilidade da curva original.

Dada uma curva contida num intervalo fechado $[a, b]$, com $\alpha(a) = P_0$ e $\alpha(b) = P_1$, é sempre possível realizar uma reparametrização de modo a obter $\alpha(0) = P_0$ e $\alpha(1) = P_1$. Esse ajuste é alcançado por meio da introdução de uma função $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida por $f(t) = (b - a)t + a$. Ao fazer a composição $\alpha(f(t))$ conseguimos uma nova parametrização da curva com $\alpha(f(0)) = P_0$ e $\alpha(f(1)) = P_1$. Portanto, devido a esse fato, sempre vamos considerar o intervalo $[a, b]$ como o intervalo $[0, 1]$.

3.3 Curvas de Bézier

No contexto histórico, as curvas de Bézier ganharam destaque em meados do século 20, quando o engenheiro francês Pierre Bézier (1910-1999) aplicou-as na modelagem de formas aerodinâmicas de carros para a Renault (Pereira, 2022). Essa contribuição foi particularmente valiosa na criação de curvas suaves e fluidas em designs automotivos, proporcionando uma maneira eficaz de controlar e ajustar as curvas sem a necessidade de cálculos matemáticos mais complexos, bastando manipular uma certa quantidade de pontos (Viana, 2024).

Ao longo do tempo, essas curvas foram adotadas em diversos campos, como design gráfico, animação, tipografia e modelagem 3D. Dentre as suas principais características está a capacidade de serem definidas por pontos de controle, o que oferece uma flexibilidade significativa para a criação de formas precisas pelo simples movimento desses pontos de controle (Pereira, 2022).

Nas próximas duas subseções, definiremos curvas de Bézier de duas maneiras, por polinômios de Bernstein, e por meio dos polinômios de De Casteljaou.

3.3.1 Polinômios de Bernstein

Os polinômios de Bernstein foram introduzidos pelo matemático russo Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968), e destacam-se como uma classe significativa na teoria dos polinômios, pois desempenham um papel crucial na aproximação de funções contínuas em intervalos fechados, representando-as como combinações convexas de polinômios fundamentais, oferecendo uma abordagem única para a análise e representação de curvas suaves, o que os tornam valiosos em diversas áreas da Matemática Aplicada, desde interpolação de curvas até Desenho Auxiliado por Computador (*Computer Aided Design - CAD*) (Almeida, 2015).

Sejam i e n números inteiros não negativos, com $i \leq n$, para $t \in [0,1]$, o i -ésimo polinômio de Bernstein de grau n é definido como

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i! (n-i)!}. \quad (3.1)$$

Dados $n+1$ pontos no plano, chamados de pontos de controle,

$$P_0=(x_0,y_0), P_1=(x_1,y_1), \dots, P_{n-1}=(x_{n-1},y_{n-1}), P_n=(x_n,y_n),$$

uma curva de Bézier de grau n é uma curva parametrizada $\beta:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i = (x(t), y(t)), \quad (3.2)$$

onde

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) x_i, \quad y(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) y_i.$$

Observamos que $\beta(0)=P_0$ e $\beta(1)=P_n$.

3.3.2 Algoritmo de De Casteljau

Desenvolvido em 1959 por Paul de Casteljau (1930-2022), o algoritmo de De Casteljau é uma técnica usada para calcular pontos em Curvas de Bézier (Farin, 2002; Pereira, 2022). Dado um conjunto de pontos ordenados na sequência $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$, e um parâmetro $t \in [0,1]$, de acordo com o valor do parâmetro t , o algoritmo divide essa sequência de pontos em uma sequência menor de pontos, até que reste um único ponto, e este último ponto desejado está sobre a curva de Bézier definida pelos pontos de controle $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$.

O algoritmo de De Casteljau funciona da seguinte maneira, seja $\beta(t)$ a curva de Bézier gerada pelos $n+1$ pontos de controle, $P_0^0, P_1^0, \dots, P_{n-1}^0, P_n^0$, e $t_0 \in [0,1]$, para cada $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$ definimos um ponto P_j^1 a partir desses $n+1$ pontos por

$$P_j^1 = (1 - t_0) P_j^0 + t_0 P_{j+1}^0, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Usando os n pontos P_j^1 , obtemos $n-1$ pontos P_l^2 , para $0 \leq l \leq n-2$, dados por

$$P_l^2 = (1 - t_0) P_l^1 + t_0 P_{l+1}^1, \quad 0 \leq l \leq n-2.$$

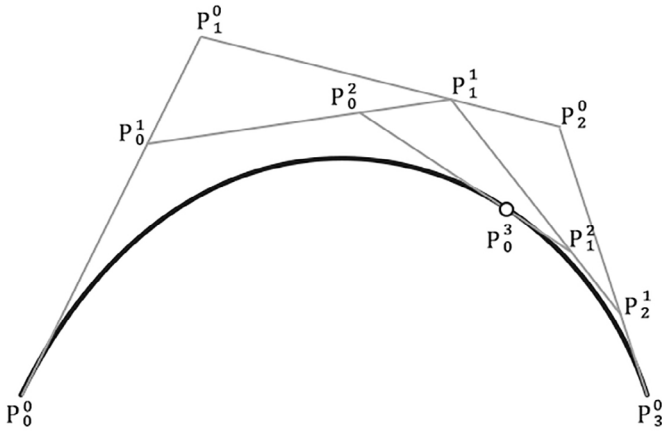
De modo geral,

$$P_m^k = (1 - t_0) P_m^{k-1} + t_0 P_{m+1}^{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq m \leq n-k, \quad (3.2)$$

e repetindo esse procedimento inúmeras vezes até chegar em um único P_0^n , chega-se ao ponto que pertence a curva de Bézier gerada pelos pontos $P_0^0, P_1^0, \dots, P_{n-1}^0, P_n^0$ para o parâmetro $t_0 \in [0,1]$, ou seja, $\beta(t_0) = P_0^n$.

Exemplo 3.2: Na Figura 3.3 temos uma construção de curva de Bézier para $n=3$ por meio do algoritmo de De Casteljau, com os seguintes pontos de controle, $P_0^0 = (0,0), P_1^0 = (2,4), P_2^0 = (6,3), P_3^0 = (7,0)$. Os pontos intermediários obtidos pela equação (3.2) para $t_0=0.7$ são $P_0^1, P_1^1, P_2^1, P_0^2, P_1^2$ e P_0^3 , o ponto P_0^3 está sobre a curva. Mais exemplos e construções de curvas de Bézier, por meio do algoritmo de De Casteljau, e usando o Geogebra, são vistos nos trabalhos de (Almeida, 2015) e (Alves, 2021).

Figura 3.3 – Curva de Bézier definida pelos pontos de controle $P_0^0 = (0,0)$, $P_1^0 = (2,4)$, $P_2^0 = (6,3)$, $P_3^0 = (7,0)$, obtida utilizando o algoritmo de De Casteljau. Os pontos intermediários $P_0^1, P_1^1, P_2^1, P_0^2, P_1^2$ e P_0^3 foram calculados usando o valor $t_0=0.7$. O ponto P_0^3 está sobre a curva.



Fonte: Autoria própria.

3.4 Propriedades das curvas de Bézier

Nesta seção, enunciaremos resultados válidos para o caso geral de uma curva de Bézier de grau n , porém vamos restringir as demonstrações para o caso de ordem $n=3$, curva de Bézier cúbica, de forma a facilitar o entendimento e visualização do que é feito nos cálculos.

Uma curva de Bézier cúbica, $\beta(t)$, gerada por quatro pontos de controle $P_0^0 = (x_0, y_0)$, $P_1^0 = (x_1, y_1)$, $P_2^0 = (x_2, y_2)$, $P_3^0 = (x_3, y_3)$, a partir do uso de polinômios de Bernstein em (3.2), tem a seguinte equação

$$\begin{aligned} \beta(t) = & (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_0^0 \\ & + (3t^3 - 6t^2 + 3t)P_1^0 \\ & + (-3t^3 + 3t^2)P_2^0 + t^3P_3^0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para o caso da definição por meio do algoritmo de De Casteljau em (3.2), essa mesma curva $\beta(t)$, a partir dos pontos de controle $P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0$, e um valor $t_0 \in [0,1]$, geramos os pontos

$$\begin{aligned}
 P_0^1 &= (1 - t_0)P_0^0 + t_0 P_1^0, \\
 P_1^1 &= (1 - t_0)P_1^0 + t_0 P_2^0, \\
 P_2^1 &= (1 - t_0)P_2^0 + t_0 P_3^0.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Com os pontos P_0^1, P_1^1, P_2^1 , geramos os pontos

$$\begin{aligned}
 P_0^2 &= (1 - t_0)P_0^1 + t_0 P_1^1, \\
 P_1^2 &= (1 - t_0)P_1^1 + t_0 P_2^1.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Usando P_0^2, P_1^2 , obtemos o ponto

$$P_0^3 = (1 - t_0)P_0^2 + t_0 P_1^2. \tag{3.6}$$

Este ponto P_0^3 pertence a curva $\beta(t)$, ou seja, $P_0^3 = \beta(t_0)$. Com efeito, fazendo as substituições das equações dos pontos P_0^2, P_1^2 em (3.5) na equação de P_0^3 em (3.6),

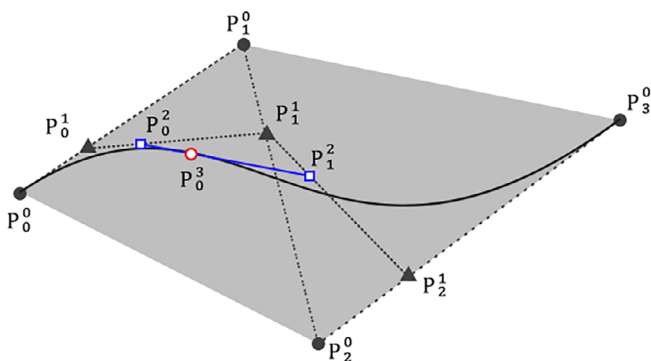
$$P_0^3 = (t_0^2 - 2t_0 + 1)P_0^1 + (-2t_0^2 + 2t_0)P_1^1 + t_0^2 P_2^1, \tag{3.7}$$

e substituindo P_0^1, P_1^1, P_2^1 em (3.4) nesta última equação em (3.7), chegamos na equação de $\beta(t)$ em (3.3) quando $t=t_0$.

Para o caso em particular das curvas de Bézier cúbicas, essa discussão mostra que as definições das curvas de Bézier por meio dos polinômios de Bernstein e pelo algoritmo de De Casteljau são equivalentes, no entanto o resultado também é válido para o caso geral das curvas de Bézier de ordem n .

Exemplo 3.3: A construção da curva de Bézier cúbica por meio do algoritmo de De Casteljau é exibida na Figura 3.4 para curva de Bézier $\beta:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, para $t_0=0.3$, onde os pontos de controle da curva β são $P_0^0 = (1,2), P_1^0 = (4,4), P_2^0 = (5,0), P_3^0 = (9,3)$ e são representados pelos círculos cinzas. Os pontos P_0^1, P_1^1, P_2^1 são os triângulos, os pontos os quadrados, e o ponto $P_0^3 = \beta(0.3)$ é o círculo na cor vermelha que está sobre o traço da curva β . Utilizando a expressão em (3.3), a equação da curva $\beta:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $\beta(t) = (5t^3 - 6t^2 + 9t + 1, 13t^3 - 18t^2 + 6t + 2)$.

Figura 3.4 – Curva de Bézier $\beta:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pelos pontos de controle $P_0^0 = (1,2), P_1^0 = (4,4), P_2^0 = (5,0), P_3^0 = (9,3)$. Usando o algoritmo de De Casteljau, para o valor $t_0=0.3$ obtemos os pontos $P_0^1, P_1^1, P_2^1, P_0^2, P_1^2$ e $P_0^3 = \beta(0.3)$. O fecho convexo dos pontos $P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0$ é o polígono destacado na cor cinza.



Fonte: Autoria própria.

Um conjunto de pontos no plano $\mathcal{H}$ é convexo se dados quaisquer dois pontos $P, Q \in \mathcal{H}$, então o segmento de reta PQ está inteiramente contido em $\mathcal{H}$, ou, equivalentemente, se

$$(1-t)P+tQ \in \mathcal{H}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Dado um conjunto de pontos $\mathfrak{R}_n = \{P_0^0, P_1^0, \dots, P_{n-1}^0, P_n^0\}$, o fecho convexo desse conjunto de pontos $\mathfrak{R}_n$ é o menor polígono convexo que contém todos os pontos de $\mathfrak{R}_n$.

Sejam $\mathfrak{R}_3 = \{P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0\}$ um conjunto de pontos no plano, $\mathcal{F}$ o fecho convexo de $\mathfrak{R}_3$ e $\beta(t)$ a curva de Bézier cúbica gerada pelos pontos de $\mathfrak{R}_3$. Seguindo essa notação e a construção de curvas de Bézier por meio do algoritmo de De Casteljau, consideremos $t_0 \in [0,1]$ e os pontos P_0^1, P_1^1, P_2^1 dados em (3.4). Por definição, P_0^1, P_1^1, P_2^1 estão em $\mathcal{F}$, pois pertencem, respectivamente, aos segmentos $P_0^0P_1^0, P_1^0P_2^0, P_2^0P_3^0$ (veja Figura 3.4). De modo análogo, os pontos P_0^2 e P_1^2 , definidos em (3.5), também estão em $\mathcal{F}$. Por conseguinte, $P_0^3 = \beta(t_0)$ pertencente ao segmento $P_0^2P_1^2$, definido em (3.5), está no fecho convexo de $\mathfrak{R}_3$. Logo, sendo $t_0 \in [0,1]$ arbitrário, provamos que para todo $t \in [0,1]$, $\beta(t) \in \mathcal{F}$.

Na Figura 3.4 vemos uma curva de Bézier cúbica β com seu traço totalmente contido dentro do fecho convexo gerado por seus pontos de controle $P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0$. De modo geral, vale a seguinte propriedade.

Propriedade 3.1 (Fecho Convexo): Seja $\beta(t)$ uma curva de Bézier de grau n , definida por $n+1$ pontos de controle $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, então $\beta(t)$ está totalmente contida no fecho convexo dos pontos de controle.

Demonstração: A demonstração do caso geral é encontrada em (Farin, 2002) ou (Pereira, 2022), e segue este raciocínio para o caso das curvas de Bézier cúbicas apresentado acima. ■

Uma utilidade para esta Propriedade 3.1 é verificar, de forma rápida, se duas curvas de Bézier distintas se interceptam, pois caso o fecho convexo dos seus respectivos pontos de controle não se interceptem, as curvas não irão se interceptar (Almeida, 2015; Farin, 2002). Entretanto, caso exista interseção entre os fechos convexos, cálculos mais precisos são necessários.

Propriedade 3.2 (Partição da unidade): Para todo $t \in [0,1]$, a soma de todos os i -ésimos polinômios de Bernstein de grau n é sempre igual a 1,

$$\sum_i^n B_i^n(t) = 1.$$

Demonstração: Para o caso em que $n=3$, seja $t \in [0,1]$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) &= B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t) \\ &= \binom{3}{0} (1-t)^3 + \binom{3}{1} (1-t)^2 t \\ &\quad + \binom{3}{2} (1-t) t^2 + \binom{3}{3} t^3 \\ &= (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) \\ &\quad + (3t^2 - 6t^2 + 3t) \\ &\quad + (3t^2 - 3t^3) + t^3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

A demonstração do caso geral é encontrada em (Farin, 2002) ou (Pereira, 2022). ■

Uma transformação afim é uma aplicação $T:D \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) = \sum \alpha_j (x_j, y_j), \right. \\ \left. \sum \alpha_j = 1, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad (3.8)$$

que satisfaz $T(\sum \alpha_j (x_j, y_j)) = \sum \alpha_j T(x_j, y_j)$ e é definida por

$$T(x, y) = A \cdot (x, y) + v, \quad (3.9)$$

onde A é uma matriz 2×2 e v é um vetor do plano (Farin, 2002). De fato, dado $(x, y) \in D$, e lembrando que $\sum \alpha_j = 1$,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T\left(\sum \alpha_j (x_j, y_j)\right) \\ &= A \cdot \left(\sum \alpha_j (x_j, y_j)\right) + v \\ &= \left[\sum \alpha_j A \cdot (x_j, y_j)\right] + v \\ &= \left[\sum \alpha_j A \cdot (x_j, y_j)\right] + \left[\sum \alpha_j\right] v \\ &= \sum \alpha_j [A \cdot (x_j, y_j) + v] \\ &= \sum \alpha_j T(x_j, y_j). \end{aligned}$$

Obviamente, a depender da matriz A e do vetor v em (3.9), temos um determinado tipo de transformação afim. Enunciamos alguns exemplos.

1. Se A for a matriz identidade e v um vetor não nulo, então T em (3.9) é uma translação.
2. No caso em que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

e v é o vetor nulo, então T em (3.9) é uma rotação de θ graus em torno da origem.

3. Sejam $k_x, k_y \in \mathbb{R}_+^*$ para

$$A = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix},$$

e v é o vetor nulo, então T em (3.9) é um reescalonamento, onde k_x reescalona ao longo do eixo x , e k_y reescalona ao longo do eixo y .

Propriedade 3.3 (Invariância por transformação afim): As curvas de Bézier são invariantes por transformações afim.

Demonstração: Basta observar, por meio da definição de curva de Bézier por polinômios de Bernstein, e a Propriedade 3.2, que todo ponto no plano que está no traço de uma curva de Bézier pertence ao domínio das transformações afim D em (3.8).

Sendo assim, por conta desta Propriedade 3.3, um método rápido para manipular uma curva de Bézier é aplicarmos uma transformação afim em seus pontos de controle, e recalculamos o traço da curva (Farin, 2002). ■

3.5 Desenhando com curvas de Bézier

Nesta seção, explicamos a metodologia utilizada na construção da Figura 3.1, para tanto foi utilizada a calculadora digital GeoGebra, disponível no endereço <https://geogebra.org/>. O GeoGebra é um aplicativo online onde é possível fazer cálculos, desenhar gráficos de funções, traçar curvas diferenciáveis, dentre várias outras funcionalidades.

Para desenhar com curvas de Bézier cúbicas, com auxílio do GeoGebra, primeiro fazemos um desenho à mão livre (veja o desenho à esquerda na Figura 3.1), fotografamos de forma digital e salvamos como arquivo de imagem no formato PNG. Em seguida, fazemos o *upload* do arquivo de imagem do desenho para o GeoGebra por meio das opções no menu do lado esquerdo, seguindo os passos: *Tools* (Ferramentas), *Media* (Mídia), *Image* (Imagem), e clicando no botão *Browse* (Navegar) escolhemos a imagem para fazer o *upload*.

A etapa seguinte é implementar várias curvas de Bézier para manipular e adaptar o traçado de suas curvas por cima do desenho. Utilizamos ao todo seis curvas de Bézier cúbicas, são elas $a_j(t)$, $1 \leq j \leq 6$, com $t \in [0,1]$, onde a_1 é gerada pelos pontos de controle P_0, P_1, P_2, P_3 , a_2 é gerada por Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , a_3 gerada por R_0, R_1, R_2, R_3 , a_4 gerada por S_0, S_1, S_2, S_3 , a_5 gerada por T_0, T_1, T_2, T_3 , e a_6 gerada por U_0, U_1, U_2, U_3 . Para manter as curvas conectadas, escolhemos

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_3, & R_0 &= Q_3, & S_0 &= R_3, \\ T_0 &= S_3, & U_0 &= T_3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Incluimos um a um os pontos listados no parágrafo anterior. Por exemplo, para adicionar os pontos P_0, P_1, P_2, P_3 , escolhemos uma posição aleatória para cada um, e digitamos $P_0=(0,0)$, $P_1=(1,0)$, $P_2=(0,1)$ e $P_3=(1,1)$. O motivo de escolhermos uma posição aleatória, é que o GeoGebra permite deslocar os pontos ao clicar neles e arrastá-los na tela. Para adicionar a curva de Bézier cúbica $a_1(t)$, utilizamos a expressão dada em (3.3), ou seja, no GeoGebra, digitamos

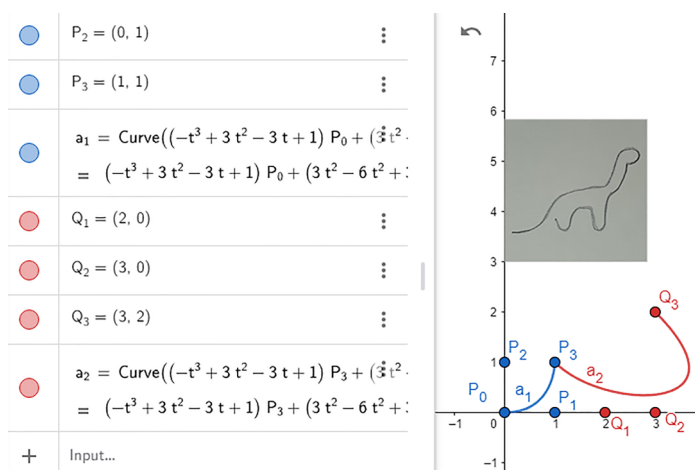
$$a_1=(-t^3+3t^2-3t+1)P_0+(3t^2-6t^2+3t)P_1+(-3t^3+3t^2)P_2+(t^3)P_3, 0 \leq t \leq 1$$

Para inclusão da curva $a_2(t)$ no GeoGebra, antes incluimos os pontos Q_1, Q_2, Q_3 em posições aleatórias, e notamos que não é necessário a inserção do ponto Q_0 , pois, como destacado em (3.10), $Q_0 = P_3$. Assim, usando (3.3), escrevemos no GeoGebra,

$$a_2=(-t^3+3t^2-3t+1)P_3+(3t^2-6t^2+3t)Q_1+(-3t^3+3t^2)Q_2+(t^3)Q_3, 0 \leq t \leq 1$$

Na Figura 3.5, temos o resultado das implementações feitas até o momento no GeoGebra.

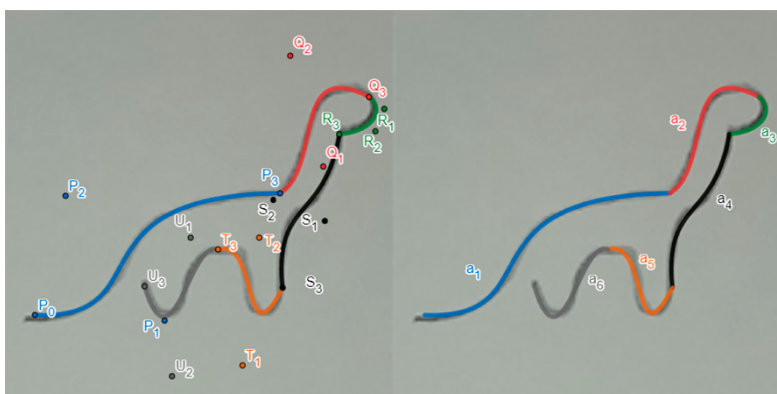
Figura 3.5 – Interface do GeoGebra com a implementação do desenho, dos pontos de controle $P_0=(0,0)$, $P_1=(1,0)$, $P_2=(0,1)$, $P_3=(1,1)$ da curva de Bézier cúbica a_1 , e dos pontos de controle $Q_0=P_3$, $Q_1=(2,0)$, $Q_2=(3,0)$, $Q_3=(3,2)$ da curva de Bézier cúbica a_2 .



Fonte: Autoria própria.

Feito isso, de modo análogo, basta adicionar os pontos restantes e as curvas $a_3(t)$, $a_4(t)$, $a_5(t)$ e $a_6(t)$, levando em conta as igualdades definidas em (3.10). Implementando todos os objetos necessários, só resta manipular a imagem e os pontos de controle das curvas para que o traçado conectado das curvas se assemelhe ao desenho. Este passo é executado por tentativa e erro, fazendo os ajustes necessários na movimentação de cada ponto de controle. O resultado está na Figura 3.6, onde, à esquerda, exibimos as curvas sobre o desenho, com destaque para os pontos de controle. Na mesma figura, à direita, observamos as curvas sobre o desenho, exibindo a nomenclatura de cada curva a_1 até a_6 .

Figura 3.6 – Curvas de Bézier cúbicas $a_j: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($1 \leq j \leq 6$), implementadas no GeoGebra e formando um desenho feito a mão livre. Na imagem à esquerda, destacamos os pontos de controle de cada curva. Na imagem à direita, destacamos a nomenclatura de cada curva $a_1, \dots, a_6$.



Fonte: Autoria própria.

Ainda no GeoGebra, para cada curva $a_j: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, ($1 \leq j \leq 6$), usando o comando *Expand*, por exemplo, na curva a_1 , *Expand(a_1)*, temos acesso a sua equação final. A seguir, listamos a equação de cada curva a_j exibida na imagem à direita da Figura 3.6,

$$a_1(t) = \left(\frac{553784072505319}{10000000000000} t^3 - \frac{5474222627499}{78125000000} t^2 + \frac{39733679488953}{10000000000000} t + \frac{8448621343989}{6250000000000}, -\frac{257242321404289}{10000000000000} t^3 + \frac{19917812738007}{5000000000000} t^2 - \frac{8603494430241}{5000000000000} t + \frac{194247415259357}{10000000000000} \right),$$

$$a_2(t) = \left(\frac{95938092949957}{5000000000000} t^3 - \frac{233356693407957}{10000000000000} t^2 + \frac{66117729798921}{5000000000000} t + \frac{385598312578801}{10000000000000}, -\frac{60084485329143}{2500000000000} t^3 + \frac{256692362748753}{10000000000000} t^2 + \frac{81674842692783}{10000000000000} t + \frac{159077179877363}{5000000000000} \right),$$

$$a_3(t) = \left(-\frac{1515110480259}{5000000000000} t^3 - \frac{37120206766329}{5000000000000} t^2 + \frac{5871053111001}{12500000000000} t + \frac{2381766323343}{5000000000000}, \frac{6060441921033}{2000000000000} t^3 - \frac{31817320085421}{10000000000000} t^2 - \frac{9090662881551}{2500000000000} t + \frac{41618362387969}{10000000000000} \right),$$

$$a_4(t) = \left(\frac{50105361064167}{5000000000000} t^3 - \frac{22742815264287}{2000000000000} t^2 - \frac{1383937242191}{312500000000} t + \frac{55756381882929}{1250000000000} - \frac{110345680128383}{5000000000000} t^3 + \frac{411674373351}{12500000000} t^2 - \frac{132513480175047}{5000000000000} t + \frac{37830586187323}{1000000000000} \right),$$

$$a_5(t) = \left(-\frac{58531402291879}{5000000000000} t^3 + \frac{87046700844333}{5000000000000} t^2 - \frac{123066025331643}{10000000000000} t + \frac{388268109120219}{10000000000000} - \frac{175594206875633}{5000000000000} t^3 + \frac{62733658153971}{10000000000000} t^2 - \frac{118563609770727}{5000000000000} t + \frac{22192703994717}{10000000000000} \right),$$

$$a_6(t) = \left(-\frac{3607599645093}{2000000000000} t^3 + \frac{27014493365481}{10000000000000} t^2 - \frac{21011272617597}{2500000000000} t + \frac{80558170223371}{2500000000000} - \frac{385666326482019}{10000000000000} t^3 - \frac{918492774442639}{2000000000000} t^2 + \frac{3601932448731}{10000000000000} t + \frac{260947974808421}{10000000000000} \right).$$

3.6 Design de fontes tipográficas

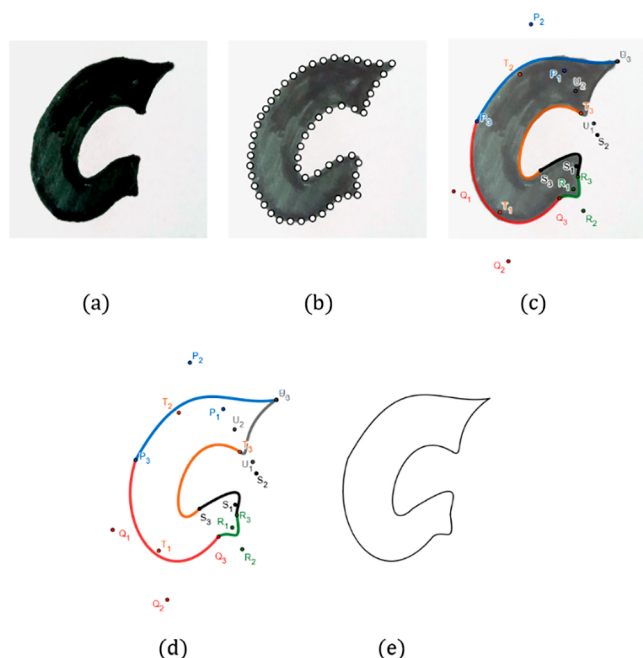
Das várias aplicações das curvas de Bézier, uma delas é o design de tipografia de fontes. Nesta seção, descrevemos a ideia dos algoritmos desenvolvidos em (Itoh & Ohno, 1993) e (Schneider, 1990).

A metodologia do que é executado por esses autores para auxiliar no design de fontes, usando curvas de Bézier, assemelha-se ao que fizemos na seção 3.5, porém feito de forma autônoma, utilizando recursos computacionais. Em outras palavras, uma imagem contendo o design do caractere de uma fonte, por exemplo da letra “C”, é digitalizado e o algoritmo computacional vai transformar esse design mais rústico, que pode ter sido feito à mão livre, em um modelo mais suave, pelas curvas de Bézier. Para tanto, utiliza uma série de algoritmos computacionais, que não iremos entrar em detalhes por ser algo técnico e que foge do escopo deste texto.

Em linhas gerais, a prática executada em (Itoh & Ohno, 1993) e (Schneider, 1990) é a seguinte: primeiro uma imagem é digitalizada, podendo representar um design de fonte ou desenho, depois, usando algoritmos específicos, essa imagem é transformada em vários pontos. É a partir desses pontos, operando uma série de recursos computacionais, isto é, algoritmos, que os mesmos pontos são transformados em curvas de Bézier cúbicas conectadas.

A Figura 3.7, apesar de ter sido feito de forma manual, com auxílio do GeoGebra, exemplifica os passos do parágrafo anterior. Na Figura 3.7 (a) temos a imagem original digitalizada, um design da letra “C” feito à mão livre; na Figura 3.7 (b) a imagem com vários pontos, que em (Itoh & Ohno, 1993) e (Schneider, 1990) são calculados computacionalmente. A partir desses pontos da Figura 3.7 (b), os algoritmos desenvolvidos em (Itoh & Ohno, 1993) ou (Schneider, 1990), calculam curvas de Bézier cúbicas conectadas, para obter as que melhor representam a imagem original, alcançando um resultado similar como na Figura 3.7 (c). As imagens (d) e (e) na Figura 3.7 são as curvas da imagem (c), sem o desenho original sobreposto.

Figura 3.7 – Processo do algoritmo para criação de fontes. Em (a) design original feito à mão livre, em (b) conjunto de pontos contornando a imagem, a partir destes pontos são obtidas as curvas em (c), em (d) e (e) são as curvas de (c) representando o resultado final. Ressaltamos que estas imagens foram geradas manualmente, com auxílio do GeoGebra, apenas com intuito de explicar os algoritmos em (Itoh & Ohno, 1993; Schneider, 1990).



Fonte: Autoria própria.

3.7 Conclusão

Neste trabalho, explicamos o que é uma curva parametrizada diferenciável no plano, e definimos um tipo particular de curva, chamado de curva de Bézier, onde é possível controlar a forma do traço da curva por meio de pontos de controle. Apresentamos algumas propriedades das curvas de Bézier cúbicas, que também são válidas para o caso geral. O objetivo dessa restrição foi para tornar mais fácil a compreensão das demonstrações dessas características. Com auxílio do aplicativo GeoGebra, mostramos uma aplicação das curvas de Bézier na Computação Gráfica, onde a partir de um desenho feito a mão livre, implementamos curvas de Bézier cúbicas conectadas, de maneira que o traçado das curvas fosse o mais semelhante possível ao traçado do desenho (vide Figuras 3.1 e 3.6). Ainda usando o recurso do GeoGebra,

explicamos como funcionam algoritmos, que geram curvas de Bézier cúbicas, aplicados no processo de design de fontes (Figura 3.7).

Referências

ALMEIDA, Evert Elvis Batista de. **Curvas de Bézier**. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal da Paraíba, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, João Pessoa, 2015. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=1699&id2=78086. Acesso em 03 jun. 2024.

ALVES, Alane da Rocha. **Uma sequência didática para o ensino de curvas de Bézier usando GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Maceió, 2021. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=6023&id2=171055016. Acesso em 03 jun. 2024.

ITOH, Koichi; OHNO, Yoshio. A curve fitting algorithm for character fonts. **Electronic publishing**, v. 6, n. 3, p. 195-205, 1993. Disponível em: <http://cajun.cs.nott.ac.uk/compsci/epo/papers/volume6/issue3/ohno.pdf>. Acesso em: 12 de set. de 2024.

ANDRADE, Lenimar Nunes de. **Cálculo Numérico: Introdução à Matemática Computacional**. Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, João Pessoa, 2016. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/~lenimar/textos/numerv2.pdf>. Acesso em 03 jun. 2024.

MACHADO, Fabricio C. **Curvas de Bézier e Desenho de Fontes Tipográficas**. Universidade Estadual de Campinas, 2013. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~fabcm/files/projeto_bezier.pdf. Acesso em 04 de jun. de 2024.

FARIN, Gerald E. **Curves and surfaces for CAGD: a practical guide**. 5th edition, Arizona, Morgan Kaufman Publishers, 2002.

PEREIRA, Artur Teixeira. **Curvas de Bézier**. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,

Fortaleza, 2022. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=7077&id2=171057175. Acesso em 03 jun. 2024.

SANTOS, Gleyd Oliveira dos. **Aplicação de Curvas de Bézier para o estudo de funções polinomiais no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=1792&id2=80051. Acesso em 03 jun. 2024.

SCHNEIDER, P. J. An algorithm for automatically fitting digitized curves. In: **Graphics gems**. p 612--626. Academic Press Professional, Inc., San Diego, 1990.

TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial**. Editora Blucher, 2a edição, 2008.

VAN VERTH, James M.; BISHOP, Lars M. **Essential mathematics for games and interactive applications**. CRC Press, 2015.

VIANA, Marcelo. **Bézier, Casteljau e a revolução do design industrial**. Disponível em: <https://impa.br/noticias/folha-bezier-casteljau-e-a-revolucao-do-design-industrial>. Acesso em 01 de jun. de 2024.

CAPÍTULO 4

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM MÉTODO SIMPLEX POR TABELAS

José Laudelino de Menezes Neto

4.1 Introdução

No artigo (de Menezes Neto, 2023) é explicado como funciona o Método Simplex por tabelas, ferramenta utilizada para resolução de problemas de Programação Linear (PL). Os problemas de PL são questões onde o propósito é determinar o valor de máximo ou mínimo de uma função objetivo z , sendo definida por uma combinação linear de n variáveis reais, $x_1, x_2, \dots, x_n$, onde essas variáveis estão restritas a certas condições lineares. Escrevemos um problema de PL da seguinte forma.

Maximizar
(ou minimizar) a
função objetivo $z: c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Restrito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

As variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ e os valores c_i, a_{ij} e b_j são reais. Além disso, nos restringimos ao caso de $b_j \geq 0$.

Nos trabalhos de (Boldrini, 1980) e (Eduardo Wagner, 2022) é explicado o que ocorre geometricamente na resolução de um problema de PL. No entanto, neste texto, temos como meta explicar melhor algumas lacunas existentes em (de Menezes Neto, 2023), detalhando a resolução do problema onde ocorre um loop (seção 3.3 de (de Menezes Neto, 2023)), e resolvendo um exemplo proposto. Portanto, para uma melhor compreensão deste texto, recomendamos a leitura prévia do

artigo (de Menezes Neto, 2023). No entanto, para deixar este texto auto explicativo, informamos como é o procedimento de resolução do método simplex por tabelas descrito em (Chvatal, 1999) e (de Menezes Neto, 2023).

4.2 Método Simplex por tabelas

Descrevemos brevemente o procedimento executado para resolver um problema de PL por meio do Método Simplex por tabelas (Chvatal, 1999; de Menezes Neto, 2023).

Dado um problema de PL como visto na seção 4.1, adicionamos m variáveis, chamadas de variáveis de folga, $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ e obtemos o problema dado abaixo.

Maximizar (ou minimizar) a função objetivo z:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{Restrito a: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

Transformamos o problema acima no formato de tabela exibido na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Problema de PL em formato de tabela.

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	s
L_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
L_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
			$\vdots$						
L_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
z	c_1	c_2	$\dots$	c_n	0	0	$\dots$	0	0

Fonte: Autoria própria.

Com o problema dado na Tabela 4.1, em cada iteração executamos o seguinte procedimento:

1. Na linha z , escolhemos a coluna x_i de maior valor. Em caso de duas ou mais colunas com valores iguais, escolhemos a de menor índice i .
2. Nas linhas L_j , efetuamos a divisão dos valores da coluna s pelo respectivo valor da coluna x_i selecionada. De mogo genérico, efetuamos a divisão b_j/a_{ij} , desde que $a_{ij} > 0$, e escolhemos a linha L_j do resultado dessa divisão que seja o de menor valor. Se só tiver $a_{ij} \leq 0$ na coluna x_i , então o problema é ilimitado e o Método Simplex por tabela é finalizado (Chvatal, 1999; de Menezes Neto, 2023). Em caso de duas ou mais linhas com mesmo valor de b_j/a_{ij} , escolhemos a de menor índice j .
3. Com a coluna x_i e linha L_j selecionadas, zeramos os valores acima e abaixo de L_j na coluna x_i .

Repetimos o procedimento acima até que todos os valores da linha z , nas colunas x_i , sejam menores ou iguais a zero. O valor ótimo da função z é o valor absoluto da coluna s .

Uma visão mais detalhada deste método é vista em (de Menezes Neto, 2023).

4.3 Problema que entra em loop

O problema que entra em loop na sexta iteração, apresentado na seção 3.3 de (de Menezes Neto, 2023), foi originalmente retirado do livro de (Chvatal, 1999), e tem o enunciado mostrado a seguir. O problema de entrar em loop, significa que durante a resolução, em determinada iteração, o problema vai repetir uma iteração anterior.

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } z: 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4 \\
 &\text{Restrito a: } \begin{aligned}
 &-2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
 &\frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 \leq 0 \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Usando os procedimentos de resolução do Método Simplex por tabelas descrito na seção anterior, o problema acima, já com as variáveis de folga, x_5 e x_6 , fica no formato da Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Problema de PL apresentado acima em formato de tabela, com as variáveis de folga adicionadas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s
L_1	-2	-9	1	9	1	0	0
L_2	1/3	1	-1/3	-2	0	1	0
z	2	3	-1	-12	0	0	0

Fonte: Autoria própria.

Iteração 1. Na Tabela 4.2, na linha z , a escolha é a coluna x_2 por ter o maior valor que é 3. O valor na linha L_1 é -9 e o valor na linha L_2 é 1. Nesse caso, só efetuamos a divisão correspondente apenas a linha L_2 ,

$$\frac{0}{1} = 0 \text{ (linha } L_2\text{)}.$$

Não é necessário fazer a divisão na linha L_1 , pois o valor -9 é menor ou igual a zero. Em outras palavras, ao escolhermos a coluna x_2 , só devemos fazer a divisão dos valores da coluna s pelos valores da coluna x_2 , apenas quando o valor for maior que zero. Portanto, a escolha feita é a linha L_2 e zeramos os valores acima e abaixo na coluna x_2 . Fazemos as seguintes operações:

- linha L_1 passa a ser $L_1 + 9L_2$; e
- linha z passa a ser $z - 3L_2$.

Encerra-se a Iteração 1 e a Tabela 4.2 se torna a Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Problema apresentado na Tabela 4.2 após primeira iteração.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s
L_1	1	0	-2	-9	1	9	0
L_2	1/3	1	-1/3	-2	0	1	0
z	1	0	0	-6	0	-3	0

Fonte: Autoria própria.

Iteração 2. Na Tabela 4.3, a única escolha possível na linha z é a coluna x_1 . Como os valores da linha L_1 e L_2 , na coluna x_1 , são positivos, respectivamente 1 e 1/3, então

$$\frac{0}{1} = 0 \text{ (linha } L_1\text{)} \text{ e } \frac{0}{1/3} = 0 \text{ (linha } L_2\text{)}.$$

Ocorre um empate na escolha, pois em ambos os casos, os valores foram nulos. Em caso de empate, escolhemos a linha de menor índice, no caso L_1 e efetuamos as operações:

- linha L_2 passa a ser $L_2 - \frac{1}{3}L_1$; e
- linha z passa a ser $z - L_1$.

Chegamos ao fim da segunda iteração com a Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Problema apresentado na Tabela 4.2 após segunda iteração.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s
L_1	1	0	-2	-9	1	9	0
L_2	0	1	1/3	1	-1/3	-2	0
z	0	0	2	3	-1	-12	0

Fonte: Autoria própria.

Iteração 3. Na Tabela 4.4, devemos escolher a coluna x_4 por ter o maior valor na linha z . Na coluna x_4 , o único valor positivo ocorre na linha L_2 , na linha L_1 temos um valor negativo. Portanto, a escolha é a linha L_2 . Para zerar os valores na coluna x_4 , nas linhas L_1 e z , fazemos as operações:

- linha L_1 passa a ser $L_1 + 9L_2$; e
- linha z passa a ser $z - 3L_2$.

Encerramos a terceira iteração com a Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Problema apresentado na Tabela 4.2 após terceira iteração.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s
L_1	1	9	1	0	-2	-9	0
L_2	0	1	1/3	1	-1/3	-2	0
z	0	-3	1	0	0	-6	0

Fonte: Autoria própria.

Iteração 4. Na Tabela 4.5, somos obrigados a selecionar a coluna x_3 na linha z e, na etapa seguinte, ocorre empate nas linhas L_1 e L_2 , portanto a escolha é a linha de menor índice, L_1 . Zeramos os valores acima e abaixo da linha L_1 , na coluna x_3 , fazendo as operações:

- linha L_2 passa a ser $L_2 - \frac{1}{3}L_1$; e
- linha z passa a ser $z - L_1$.

Feito isso, obtemos a Tabela 4.6, encerrando a Iteração 4.

Tabela 4.6 – Problema apresentado na Tabela 4.2 após quarta iteração.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s
L_1	1	9	1	0	-2	-9	0
L_2	-1/3	-2	0	1	1/3	1	0
z	-1	-12	0	0	2	3	0

Fonte: Autoria própria.

Iteração 5. Na Tabela 4.6, a escolha é a coluna x_6 na linha z , e, em seguida, a linha L_1 , e fazemos:

- L_1 passa a ser $L_1 + 9L_2$; e
- linha z passa a ser $z - 3L_2$.

Obtemos a Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Problema apresentado na Tabela 4.2 após quinta iteração.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s
L_1	-2	-9	1	9	1	0	0
L_2	-1/3	-2	0	1	1/3	1	0
z	0	-6	0	-3	1	0	0

Fonte: Autoria própria.

Iteração 6. Na Tabela 4.7, a escolha na linha z é a coluna x_5 e, no passo seguinte, por conta do empate, escolhemos a linha de menor índice L_1 . Ao fazermos as operações:

- linha L_2 passa a ser $L_2 - \frac{1}{3}L_1$; e
- linha z passa a ser $z - L_1$

A tabela resultante é a Tabela 4.2, ou seja, o problema entrou em um loop, porque retornou para o início. Se fizermos todo o procedimento, ficamos percorrendo da Iteração 1 até Iteração 5, e retornando para Iteração 1.

4.4 Resolução de exemplo proposto de PL

Nesta seção, o objetivo é resolver, utilizando o Método Simplex por tabelas, o problema de PL a seguir.

Maximizar z : $5x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned} \text{Restrito a:} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ & -x_1 + 3x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema de PL é encontrado no livro (Chvatal, 1999). Por ter quatro linhas de restrição, adicionamos quatro variáveis de folga, x_4, x_5, x_6 e x_7 .

Maximizar z : $5x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned} \text{Restrito a:} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & -x_1 + 3x_3 + x_5 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_7 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Após a adição das variáveis de folga, transformamos o problema em seu formato de tabela, apresentado na Tabela 4.8. Em seguida, iniciamos as iterações para resolução.

Tabela 4.8 – Problema apresentado acima no formato de tabela.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	1	3	1	1	0	0	0	3
L_2	-1	0	3	0	1	0	0	2
L_3	2	-1	2	0	0	1	0	4
L_4	2	3	-1	0	0	0	1	2
z	5	5	3	0	0	0	0	0

Fonte: Autoria própria.

Iteração 1. Existem duas opções de escolha na linha z , por terem os maiores valores, coluna x_1 , com valor 5, ou x_2 , também com valor 5, entretanto neste caso de empate, escolhemos o menor índice, x_1 . Próximo passo, efetuamos a divisão dos valores de cada linha da coluna x_1 pelo seu respectivo na coluna s .

- Linha L_1 : $\frac{3}{1} = 3$.
- Linha L_2 : ignora, pois o valor na coluna x_1 é negativo, -1 , então não precisa fazer a divisão.

• Linha L_3 : $\frac{4}{2} = 2$.

• Linha L_4 : $\frac{2}{2} = 1$.

O menor resultado destas divisões ocorre na linha L_4 , portanto é a linha selecionada, e efetuamos as operações:

• L_1 passa a ser $L_1 - \frac{1}{2} L_4$;

• L_2 passa a ser $L_2 + \frac{1}{2} L_4$;

• L_3 passa a ser $L_3 - L_4$; e

• z passa a ser $z - \frac{5}{2} L_4$.

Encerra-se a Iteração 1 com o resultado dado pela Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Problema apresentado na Tabela 4.8 após Iteração 1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	0	$3/2$	$3/2$	1	0	0	0	2
L_2	0	$3/2$	$5/2$	0	1	0	0	3
L_3	0	-4	3	0	0	1	0	2
L_4	2	3	-1	0	0	0	1	2
z	0	$-5/2$	$11/2$	0	0	0	$-5/2$	-5

Fonte: Autoria própria.

Iteração 2. Na linha z , a única opção de escolha é a coluna x_3 , por ser a única com valor positivo. Efetuamos a divisão dos valores de cada linha da coluna x_3 pelo seu respectivo valor na coluna s .

• Linha L_1 : $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \approx 1,33$, onde o símbolo “ $\approx$ ” denota valor aproximado;

• Linha L_2 : $\frac{3}{5/2} = \frac{6}{5} = 1,2$;

• Linha L_3 : $\frac{2}{3} \approx 0,66$; e

• Linha L_4 : ignora, pois o valor na coluna x_3 é negativo, -1, então não precisa fazer a divisão.

O menor resultado dessas divisões ocorre na linha L_3 , portanto é a linha selecionada, e efetuamos as operações:

- L_1 passa a ser $L_1 - \frac{1}{2} L_3$;
- L_2 passa a ser $L_2 - \frac{5}{6} L_3$;
- L_4 passa a ser $L_4 + \frac{1}{3} L_3$; e
- z passa a ser $z - \frac{11}{6} L_3$.

Termina a Iteração 2 com o resultado da Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Problema apresentado na Tabela 4.8 após Iteração 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	0	$7/2$	0	1	0	$-1/2$	0	3
L_2	0	$29/6$	0	0	1	$-5/6$	$4/3$	$4/3$
L_3	0	-4	3	0	0	1	-1	2
L_4	2	$5/3$	0	0	0	$1/3$	$2/3$	$8/3$
z	0	$29/6$	0	0	0	$-11/6$	$-2/3$	$-26/3$

Fonte: Autoria própria.

Iteração 3. Na linha z , só temos a escolha da coluna x_2 , por ser a única com valor positivo. Efetuamos a divisão dos valores de cada linha da coluna x_2 pelo seu respectivo valor na coluna s .

- Linha L_1 : $\frac{1}{7/2} = \frac{2}{7} \approx 0,28$;
- Linha L_2 : $\frac{4/3}{29/6} = \frac{8}{29} \approx 0,27$;
- Linha L_3 : ignora, pois o valor na coluna x_2 é negativo, -4 , então não precisa fazer a divisão; e
- Linha L_4 : $\frac{8/3}{5/3} = \frac{8}{5} = 1,6$.

O menor resultado dessas divisões ocorre na linha L_2 , portanto é a linha selecionada, e efetuamos as operações:

- L_1 passa a ser $L_1 - \frac{21}{29} L_2$;
- L_3 passa a ser $L_3 + \frac{24}{29} L_2$;
- L_4 passa a ser $L_4 + \frac{10}{29} L_2$; e
- z passa a ser $z - L_2$.

Termina a Iteração 3 com o resultado da Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Problema apresentado na Tabela 4.8 após Iteração 3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	0	0	0	1	$-21/29$	$3/29$	$-28/29$	$1/29$
L_2	0	$29/6$	0	0	1	$-5/6$	$4/3$	$4/3$
L_3	0	0	3	0	$24/29$	$9/29$	$3/29$	$90/29$
L_4	2	0	0	0	$-10/29$	$18/29$	$6/29$	$64/29$
z	0	0	0	0	-1	-1	-2	-10

Fonte: Autoria própria.

Iteração 4. Na linha z só existem valores negativos, significando que chegamos no resultado ótimo. Com exceção da coluna s , zeramos as demais colunas, considerando que o valor na linha z é negativo, obtendo a Tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Problema apresentado na Tabela 4.8 na Iteração 4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	0	0	0	1	0	0	0	$1/29$
L_2	0	$29/6$	0	0	0	0	0	$4/3$
L_3	0	0	3	0	0	0	0	$90/29$
L_4	2	0	0	0	0	0	0	$64/29$
z	0	0	0	0	0	0	0	-10

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 4.12 se traduz nas seguintes equações.

- Linha L_1 : $x_4 = \frac{1}{29}$.
- Linha L_2 : $\frac{29}{6} x_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{29}$.
- Linha L_3 : $3x_3 = \frac{90}{29} \Rightarrow x_3 = \frac{30}{29}$.
- Linha L_4 : $2x_1 = \frac{64}{29} \Rightarrow x_1 = \frac{32}{29}$.
- Linha z : $z = |-10| = 10$.

Portanto, o problema apresentado no início desta seção 4.4 tem valor máximo $z = 10$ quando $x_1 = \frac{32}{29}$, $x_2 = \frac{8}{29}$ e $x_3 = \frac{30}{29}$.

4.5 Conclusão

Ao término deste texto, esperamos que o leitor compreenda os passos na resolução de um problema de PL, por meio do Método Simplex por tabelas.

Referências

BOLDRINI, José Luiz, et al. **Álgebra linear**. 3a edição, Harper & Row, 1980.

CHVÁTAL, V. **Linear Programming**, W. H. Freeman and Company, 1999.

WAGNER, E., MELLO, J. L. P., Seção Questões com Questões, Revista do Professor de Matemática, n. 105, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2022.

DE MENEZES NETO, J. L., SILVA, W. A. B. da. (2023). Resolução de problemas em programação linear via método simplex por tabelas. **Revista de Matemática da UFOP**, 3(3), 1-10. Recuperado de <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6944>

SOBRE OS AUTORES

Elenilson Justino de Oliveira

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), cursa Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica no Instituto Federal de Ciência e Tecnologia da Paraíba (PPGEE-IFPB) e Pós-graduação em Ciência de Dados e Engenharia de Produção pelo Centro Universitário Leonardo Da Vinci.

José Laudelino de Menezes Neto

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (2006), mestre em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (2008) e doutor em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (2016). Professor da Universidade Federal da Paraíba, lotado no campus IV, no Departamento de Ciências Exatas. Professor do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT/UFPB). Tem experiência na área de Matemática com ênfase em Sistemas Hamiltonianos, Matemática Aplicada, e Criptografia. Sócio efetivo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), e da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC).

Romildo Rodrigues da Silva Regis Junior

Graduando em Licenciatura em Ciências da Computação pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB – Campus IV). Possui certificação HSK3 em Língua Chinesa pela Universidade de Línguas Estrangeiras de Dalian, em parceria com a UFPB. Atuou como tutor e monitor da disciplina de Cálculo I e desenvolve atividades em projetos de ensino e pesquisa, com foco em Cálculo Diferencial e Integral e Pesquisa Operacional.

Ruan Bosco Gomes de Brito

Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (2022). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática. Lecionou como professor de matemática da rede básica de ensino da cidade de Jacaraú (PB) e da rede privada Colégio Chapeuzinho Vermelho – CCV.



Título DESBRAVANDO TEMAS EM
MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Organizador José Laudelino de Menezes Neto

Projeto de diagramação e Capa Jerfson Oliveira

Formato/ Tamanho e-book (PDF – 16x25,6 cm)/ 11.5 MB

Tipografia Myriad Pro e Futura

Número de páginas 68

A collage of mathematical formulas and text related to the Fibonacci sequence. The background is a light blue gradient. In the center is a large, dark blue circle containing a white 'FU' logo. Surrounding the logo are various mathematical expressions and text fragments in different colors (blue, green, orange, red, purple) and fonts. The formulas include the Fibonacci sequence definition, Binet's formula, the golden ratio, and various algebraic expressions. The text fragments include 'Sequência de Fibonacci', 'Método Simplex', 'Método de Newton', 'Curvas de Bézier', and 'Curvas de'. The overall composition is a dense, artistic representation of mathematical concepts related to the Fibonacci sequence.